Variable aléatoire.

I Variables aléatoires discrètes réelles.

Exercice 1. ☯

Une urne contient $n \in \mathbb{N}$ boules numérotées de 1 à n avec $n \geqslant 2$. On tire successivement et sans remise deux boules. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros obtenus. Déterminez Ω et $X(\Omega)$.

Correction de l'exercice 1

$\Omega = \left\{(k,p) \in [\![1,n]\!]^2 \mid k \neq p\right\}$.

$X(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$.

Exercice 2. ☯

Une urne contient $r \in \mathbb{N}^*$ boules rouges et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches .

Soit n un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant b + r$.

On tire n boules sans remise. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenues parmi les n tirages.

Déterminez $X(\Omega)$.

Correction de l'exercice 2

$X(\Omega) = [\![\max(0,n-r), \min(b,n)]\!]$.

II Variable aléatoire et probabilité.

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Exercice 3. ☢

On considère une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4 et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise dans l'urne.

Pour $k \geqslant 1$, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

Pour $k \geqslant 2$ montrez que $\mathbb{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Exercice 4.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha n}{2^n}.$$

Déterminez α.

2 Définir une variable aléatoire à partir d'une distribution.

III Fonction de répartition.

IV Variable aléatoire certaine.

V Loi uniforme.

1 Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

2 Loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

3 Loi uniforme sur $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$.

VI Loi de Bernoulli.

VII Transformée d'une variable aléatoire.

VIII Exercices.

Exercice 5.

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes ($0 \leqslant n \leqslant 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   (a) R : « la boule tirée est rouge » ;
   (b) B : « la boule tirée est blanche » ;
   (c) V : « la boule tirée est verte ».
2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
   Le joueur tire une boule de l'urne
   - si elle est rouge, il gagne 16 F :
   - si elle est blanche, il perd 12 F ;
   - si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     — si celle boule est rouge, il gagne 8 F ;
     — si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
     — si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.
   Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).
   (a) Déterminer les valeurs prises par X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Montrer que l'espérance mathématique de X est $12 + 16\dfrac{n}{(n+7)^2}$.
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$.
   Étudier les variations de f.
4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique X est maximale. Calculer celle valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

Exercice 6.

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billes dans l'urne.
   (a) On suppose ici $n = 10$. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi des deux choisis.
2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier bilet tiré avant de tirer le second.
   (a) On suppose ici $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de Y.
   (b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité, notée q_n d avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
3. (a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :
$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$
   (b) En remarquant que pour tout entier $n, n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait $p_n - q_n < 10^{-\ 3}$.
   (c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un aprés l'autre en remettant le premier billet tiré ?

Exercice 7.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
   (a) Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A peut s'écrire :
   $$p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right).$$
   (b) Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
   Vérifier que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B peut s'écrire
   $$p(B) = \frac{6}{4(n+3)}.$$
3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2.
   — Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
   — Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
   — Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

   (a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10. ? Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.
   (d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Exercice 8.

Vérifiez que la suite $\left(\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ est une distribution de probabilité.

Exercice 9.

On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. Donnez la loi de X.
2. Même question en supposant que le tirage se fait avec remise

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
On lance n fois une pièce équilibrée les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si on n'obtient aucun pile et sinon prend pour valeur le rang du premier pile.

1. Déterminez $Z(\Omega)$.
2. Calculez $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
3. Vérifiez que $\sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$.

Exercice 11.

On tire deux boules au hasard, une par une et sans remise d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle S la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminez $S(\Omega)$ puis $\mathbb{P}(S \leqslant k)$ pour tout $k \in S(\Omega)$.
2. Déduisez-en la loi de S.

Exercice 12.

Exercice 13.

On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on gagne un nombre de points égal à la somme des deux valeurs obtenues. Si les deux dés affichent la même valeur, on gagne en plus la valeur obtenue par un lancer de dé supplémentaire.

1. Calculer l'espérance du nombre de points obtenus.
2. Un joueur a obtenu 12 points. Calculer la probabilité qu'il ait commencé par obtenir deux valeurs identiques.

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On considère une urne contenant k boules rouges et $n-k$ boules blanches. On tire successivement toutes les boules de l'urne sans remise et on note X le rang de la première boule rouge.
Déterminer la loi de X et préciser son espérance.

Exercice 15.

Soit $n \geqslant 2$. Un sac contient n jetons distincts. On tire successivement et avec remise un jeton du sac jusqu'à obtenir un jeton différent du premier tiré. On note X le nombre de jetons tirés.
Justifier que $X(\Omega)$ est constitué de tous les entiers supérieurs ou égaux à 2.
Déterminer la loi de probabilité de X et justifier qu'elle admet une espérance que l'on calculera.

Exercice 16.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On procède à l'expérience suivante : on tire une boule et si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec une boule blanche supplémentaire et on recommence ; sinon on note X le nombre de tirages effectués.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « on tire n boules blanches d'affilée depuis le début de l'expérience ».

1. Calculer $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ puis $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ puis que $(n,\mathbb{P}(X = n))$ est bien une loi de probabilité.

Exercice 17.

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement et avec remise une boule de l'urne en rajoutant une boule de la même couleur. On note B_n le nombre de boules blanches dans l'urne avant le n-ième tirage. En particulier, on a $B_1 = 1$.

1. Déterminer la loi de B_2 et de B_3.
2. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1} = k)$ en fonction de la loi de B_n.
3. Déterminer la loi de probabilité de B_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18.

Oscar et Louna sont tous deux munis d'un jeu de cartes et isolés chacun dans une salle sans avoir eu le temps de se concerter. On leur demande de choisir une carte de leur paquet sachant que :

— s'ils choisissent tous les deux une carte rouge, il repartent avec 10 €,
— s'ils choisissent tous les deux une carte noire, il repartent avec 70 €,
— s'ils choisissent une carte rouge et une carte noire, il repartent avec 100 €.

Ils décident de choisir au hasard une carte de leur paquet, en s'arrangeant pour que la probabilité de choisir une carte noire soit un réel $p \in [0,1]$.

1. Montrer que l'espérance de leur gain s'écrit $180p - 120p^2 + 10$.
2. Comment choisir p pour maximiser cette espérance ? Calculer aussi l'espérance du gain dans ce cas.
3. Comment choisir au hasard une carte pour obtenir cette probabilité ?

Exercice 19.

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1,20]\!]$. Déterminez la loi de $\lfloor\sqrt{X}\rfloor$.

Exercice 20.

Soient A et B des événements d'un espace probabilisé.
Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.