Variable aléatoire.

Dans cette leçon I désigne soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{Z}$, soit un ensemble fini.

I Variables aléatoires discrètes réelles.

Définition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable.

Une *variable aléatoire sur $\mathcal{X}$* est une fonction $X : \Omega \to \mathcal{X}$ telle que $\{X = x\} := X^{-1}(\{x\})$ est un événement pour tout $x \in \mathcal{X}$.

Exemples.

1. À un lancer de deux dés à 6 faces associer la somme des nombres obtenus définit une variable aléatoire X.
   $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ et $X(\Omega) = [\![2,12]\!]$.
2. Associer des gains ou des pertes aux issues d'une expérience aléatoire finie c'est créer une variable aléatoire.
   On tire une carte d'un jeu de 32 cartes. Si la carte obtenue est une figure on gagne 10 € sinon on perd le montant correspondant à la valeur de la carte.
   Ω est formé des 32 cartes et $X(\Omega) = \{10, -1, -7, -8, -9, -10\}$.
3. Associer à dix lancers de dés le plus petit et le plus grand des lancers ne constitue pas une variable aléatoire au sens de notre définition.
   En effet nos variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ pas $\mathbb{R}^2$.
4. En associant à une répétition de pile-ou-face le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile nous définissons une variable aléatoire.
   $\Omega = \{P,FP,FFP,FFFP,FFFFP,\dots\}$ et $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
5. En associant à une répétition de pile-ou-face le nombre de piles obtenus lors de $n \in \mathbb{N}$ lancers nous définissons une variable aléatoire.
   $\Omega = \{P,F\}^n$ et $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

Remarques.

1. $X(\Omega)$ est l'ensemble des images par X. $X(\Omega)$ est appelé le *support* ou l'*univers-image* de X.
   Le plus souvent nous choisirons $X(\Omega) = \mathcal{X}$.

2. Les variables aléatoires pourrons souvent être vues comme des compteurs (du nombre de fois que quelque choses à lieu) ou comme le gain (dans un jeu d'argent par exemple).

Exercice 1. ☯
Une urne contient $n \in \mathbb{N}$ boules numérotées de 1 à n avec $n \geqslant 2$. On tire successivement et sans remise deux boules. On note X la variable aléatoire égale au plus petit des deux numéros obtenus. Déterminez Ω et $X(\Omega)$.

Correction de l'exercice 1
$\Omega = \left\{(k,p) \in [\![1,n]\!]^2 \mid k \neq p\right\}$.
$X(\Omega) = [\![1,n-1]\!]$.

Exercice 2. ☯
Une urne contient $r \in \mathbb{N}^*$ boules rouges et $b \in \mathbb{N}^*$ boules blanches .
Soit n un entier tel que $1 \leqslant n \leqslant b+r$.
On tire n boules sans remise. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches obtenues parmi les n tirages.
Déterminez $X(\Omega)$.

Correction de l'exercice 2
$X(\Omega) = [\![\max(0,n-r), \min(b,n)]\!]$.

Proposition 1

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

$\{\{X = x\} \mid x \in \mathcal{X}\}$ est un système complet d'événements.

Démonstration

Les ensembles considérés sont bien des événements par définition de la variable aléatoire.

Le fait que les ensembles soient disjoints découle de la définition d'une fonction (à un élément de l'ensemble de départ correspond au plus un élément de l'ensemble d'arrivée).

■

Proposition 2

Soient

. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,

. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,

. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire,

. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Les ensembles

$$\{X > a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}, \quad \{X \geqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant a\},$$
$$\{X < a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < a\}, \quad \{X \leqslant a\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\},$$

$$\begin{aligned}
\{a < X < b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) < b\},\\
\{a \leqslant X \leqslant b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) \leqslant b\},\\
\{a \leqslant X < b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a \leqslant X(\omega) < b\},\\
\{a < X \leqslant b\} &= \{\omega \in \Omega \mid a < X(\omega) \leqslant b\}.
\end{aligned}$$

sont des événements.

Démonstration

En utilisant les propriétés de la tribu $\mathscr{E}$ et le fait que $\mathcal{X}$ est de cardinal au plus dénombrable.

Démontrons que $\{X > a\}$ est un événement.

$$\{X > a\} = \bigcup_{x>a} \{X = x\}.$$

Or, d'après la proposition précédente $(\{X = x\})_{x>a}$ est une famille dénombrable (car $\mathcal{X}$ est dénombrable) de parties disjointes deux à deux donc leur réunion est encore un événement.

$$\boxed{\{X > a\} \text{ est un événement.}}$$

■

Remarques.

1. On retrouve d'autres notations assez semblables (au concours et dans les manuels) : $\{X = x\} = [X = x] = (X = x)$.
2. On peut de façon générale noter $\{X \in E\}$ où E désigne n'importe que ensemble réel. Dans un cadre très général, un tel ensemble n'est pas toujours un événement.

Exemples.

1. Événements avec le lancé de deux dés.
2. On réitère le tirage, avec remise, d'une boule d'une urne comportant 1 rouge et 2 jaune jusqu'à obtenir une boule rouge. En notant X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la boule rouge, Y le nombres de boules jaunes obtenues avant d'avoir la première boule rouge nous définissons des variables aléatoires.
   Alors
   $\{X = 14\}$ est l'événement « obtenir la boule rouge au 14-ième tirage »,
   $\{X > 28\}$ est l'événement « la boule rouge est obtenue après le 28ième tirage »,
   $\{Y \geqslant 12\}$ est l'événement « obtenir au moins 12 boules blanches.

II Variable aléatoire et probabilité.

1 Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition 2

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

On appelle *loi de probabilité de la variable aléatoire* X l'ensemble des couples $(x_i, \mathbb{P}(X = x_i))$ pour $i \in I$.

Remarques.

1. Plutôt que loi de probabilité on parle parfois de *distribution de probabilité*.
2. On pourrait se limiter au support de X : $(x, \mathbb{P}(X = x))$, où $x \in X(\Omega)$.
3. Nous retrouvons la notion de loi de probabilité déjà rencontrée.
   $\mathbb{P}_X$ est une loi de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathscr{P}(\mathcal{X}))$ et
   $$\forall i \in I,\ \mathbb{P}_X(x_i) = \mathbb{P}(X = x_i).$$

Exemples.

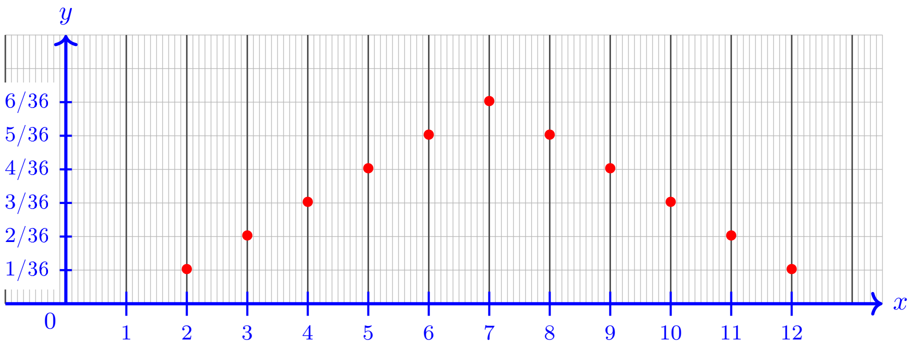
1. Sur un lancer de deux dés Y vaut 1 si c'est un double et 0 sinon.
   Dans le cas fini la loi de probabilité d'une variable aléatoire peut être représentée sous forme d'un tableau.

y_i	0	1
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Exemple de la somme, X, de deux dé.
   La loi de probabilité de X, puisqu'elle est finie peut être présentée sous forme d'un tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

   Ce tableau rappelant le tableau de valeur des fonctions il semble assez naturel d'en donner une représentation graphique :



3. Premier pile et représentation graphique.

Exercice 3. ☢

On considère une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4 et indiscernables au toucher. On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise dans l'urne.
Pour $k \geqslant 1$, on note Z_k la variable aléatoire égale au nombre de numéros distincts obtenus au cours des k premiers tirages.

Pour $k \geqslant 2$ montrez que $\mathbb{P}(Z_k = 2) = 6\dfrac{2^k - 2}{4^k}$.

Proposition 3

Soient

. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

Si $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ alors $\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{X}'\right) = \sum_{x\in\mathcal{X}'} \mathbb{P}(X = x)$.

Démonstration

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{X}'\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x\in\mathcal{X}'} \{X = x\}\right)$$

Puisque $\mathcal{X}$ est dénombrable et puisque les $\{X = x\}$, pour $x \in \mathcal{X}'$, sont disjoints deux à deux :

$$\mathbb{P}\left(X \in \mathcal{X}'\right) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \mathbb{P}(X = x)$$

■

Corollaire 1

(i) Si I est fini alors $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$.

(ii) Si I est infini alors $\sum_i \mathbb{P}(X = x_i)$ est une série convergente de somme 1.

Démonstration

Si I est infini alors, par croissance de la probabilité :

$$(X \in \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}) \subset (X \in \mathcal{X}) \Rightarrow \mathbb{P}(X \in \{x_1,x_2,\ldots,x_n\}) \leqslant \mathbb{P}(X \in \mathcal{X}).$$

Or $(X \in \mathcal{X}) = \Omega$ donc
$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(X \in \mathcal{X}) = \sum_{x\in\mathcal{X}} \mathbb{P}(X = x)$.

■

Remarques.

1. On retrouve des généralités des probabilités :

   (i) une probabilité est un nombre positif,

   (ii) la probabilité de l'univers-image est 1.

Exercice 4.
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\alpha n}{2^n}.$$

Déterminez α.

2 Définir une variable aléatoire à partir d'une distribution.

Théorème 1

Soient :

. $(p_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs,

. $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de réels deux à deux distincts.

Si $\sum_i p_i$ converge et a pour somme 1 alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{E}, \mathbb{P})$ et une variable aléatoire réelle discrète X sur $(\Omega, \mathscr{E})$ telle que $X(\Omega) = \{x_i \mid i \in I\}$ et

$$\forall i \in I, \mathbb{P}(X = x_i) = p_i.$$

Démonstration

On choisit $X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \mapsto & \mathcal{X} \\ \omega & \mapsto & \omega \end{array} \right.$. X est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. ∎

Exemples.

1. $\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n \geqslant 0}$.
2. $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \geqslant 0}$ n'est pas une distribution de probabilité.

III Fonction de répartition.

Définition 3

Soient

. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

On appelle *fonction de répartition de X*, l'application

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [0;1] \\ x & \mapsto & \mathbb{P}(X \leqslant x) \end{array} \right. .$$

Remarques.

1. On peut voir la fonction de répartition comme le pendant probabiliste des fréquences cumulées croissantes de statistiques.
2. La fonction de répartition définie parfaitement la loi de probabilité associée à la variable aléatoire X : si deux variables aléatoires ont la même fonction de répartition alors elles ont la même loi de probabilité.

Proposition 4

Soient

. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

$$F_X(x) = \sum_{\substack{x_i \in \mathcal{X} \\ x_i \leqslant x}} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 5

Soient

. $\mathcal{X} \subset \mathbb{N}$,

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) = F_X(n) - F_X(n-1)$ et donc

$$F_X(n) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k).$$

Démonstration

Corollaire du précédent résultat.

■

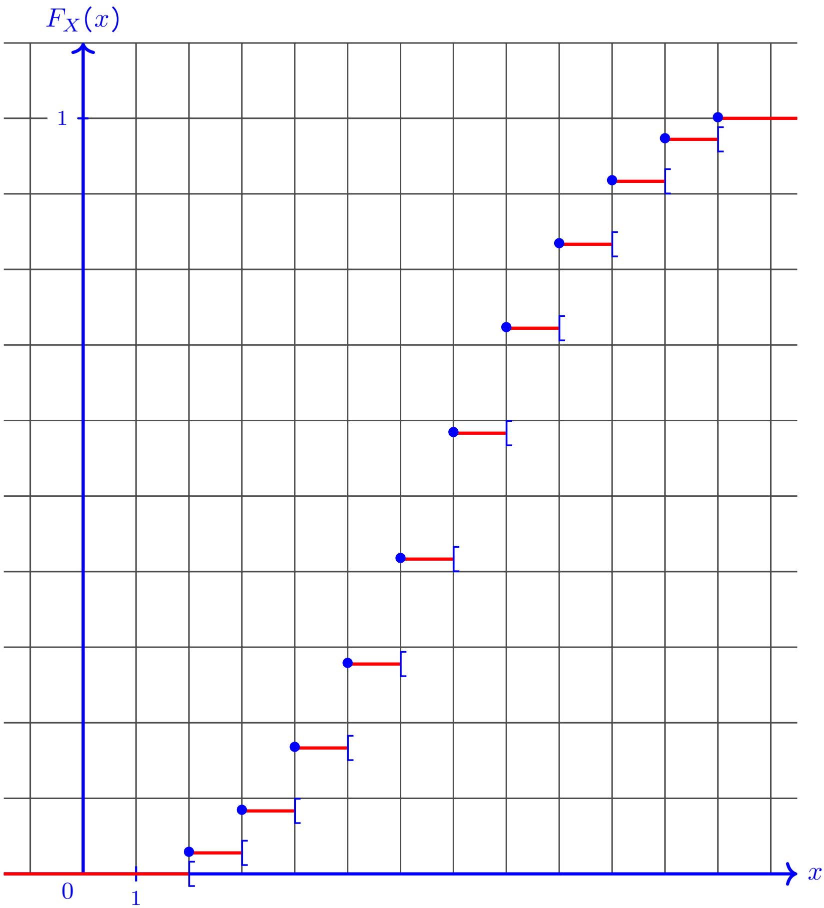
Exemples.

1. Sur un lancer de deux dés Y vaut 1 si c'est un double et 0 sinon.

   Dans le cas fini la loi de probabilité d'une variable aléatoire peut être représentée sous forme d'un tableau.

y_i	0	1
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Exemple de la somme de deux dés avec représentation graphique.



3. Premier pile et représentation graphique.

Proposition 6

$$\mathbb{P}(a < X \leqslant b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Proposition 7

Soient
. $\mathcal{X} = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$,
. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,
. $X : \Omega \to \mathcal{X}$ une variable aléatoire.

(i) F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$,
(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$,
(iv) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ a<x}} F_X(x) = F_X(a)$.

Démonstration

■

Remarques.

1. En particulier la fonction de répartition est continue à droite.

Définition 4

Le *quantile d'ordre α de X*, appelé aussi α-quantile, est l'ensemble $Q_X(\alpha) = F_X^{-1}(\{\alpha\})$.

Exemples.

1. Exemple des deux dés tableau loi de probabilité avec fonction de répartition.

2. Même exemple mais avec représentation graphique de F_X.

Remarques.

1. Le quantile d'ordre $\frac{1}{2}$ est appelé la médiane.
2. Le quantile d'ordre $\frac{1}{4}$ est appelé le premier quartile.

3. Le quantile d'ordre $\frac{1}{10}$ est appelé le premier décile.
4. Si F_X est injective alors $Q_X(\alpha)$ est un singleton et on le confond alors avec l'élément qu'il contient.
5. La fonction quantile. $Q_X : \alpha \mapsto \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leqslant F_X(x)\}$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette application est bien définie (propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$. Elle permet de retrouver les notions de quartiles, déciles vues au lycée.

IV Variable aléatoire certaine.

Définition 5

Une variable aléatoire X est dite *certaine* s'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que

(i) $X(\Omega) = \{a\}$,

(ii) $\mathbb{P}(X = a) = 1$.

Exemples.

1. Exemple avec représentation

V Loi uniforme.

1 Loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

Définition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que X suit une *loi uniforme sur* $[\![1,n]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$ si

(i) $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$,

(ii) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

Exemples.

1. Si X est la variable aléatoire indiquant le numéro obtenu lors d'un lancer de dé parfaitement équilibré alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,6]\!])$.
2. Soit Ω l'ensemble des cartes d'un jeu de carte. On tire une carte au hasard. En associant à chacune des 4 couleurs du jeu de carte un entier entre 1 et 4 on définit une variable aléatoire X suivant une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,4]\!])$.

Remarques.

1. Il s'agit d'une variable aléatoire associée à une situation d'équiprobabilité entre les issues.

2 Loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.

Définition 7

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$, on dit que X suit une *loi uniforme sur* $[\![a,b]\!]$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a,b]\!])$ si

(i) $X(\Omega) = [\![a,b]\!]$,

(ii) $\forall k \in [\![a,b]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}$.

3 Loi uniforme sur $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$.

Définition 8

Soit $(x_1,x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on dit que X suit une *loi uniforme sur* $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{x_1,x_2,\dots,x_n\})$ si

(i) $X(\Omega) = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$,

(ii) $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}$.

VI Loi de Bernoulli.

Définition 9

On dit qu'une variable aléatoire X suit une *loi de Bernoulli de paramètre* $p \in [0,1]$ et on note $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ si

(i) $X(\Omega) = \{0;1\}$,

(ii) $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et (évidemment) $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$.

Exemples.

1. Pour un lancer de pile ou face $\Omega = \{P,F\}$ et X la variable aléatoire qui à pile associe 0 et à face associe 1. $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Si $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$ X ne suit pas la loi de Bernoulli.

Définition 10

Soient :

. Ω un ensemble,

. $A \subset \Omega$.

On appelle *fonction indicatrice de A* la fonction définie par

$$\mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0;1\} \\ \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{array} \right. \end{array} \right. .$$

Remarques.

1. La fonction indicatrice de l'ensemble dépasse le cadre des probabilités et apparaît dans de nombreux domaine des athématiques.

Proposition 8

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $A \in \mathscr{E}$.

L'indicatrice $\mathbb{1}_A$ de l'événement A suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

VII Transformée d'une variable aléatoire.

Proposition 9

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,

. X une variable aléatoire réelle discrète sur $(\Omega,\mathscr{E})$,

. g une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

L'application $Y : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & g\left(X(\omega)\right) \end{array} \right.$ est une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega,\mathscr{E})$.

De plus la loi de probabilité de Y est donnée par :

(i) $Y(\Omega) = \{g(x) \mid x \in X(\Omega)\}$.

(ii) $\forall y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{\{x\in X(\Omega)\ \mid\ f(x)=y\}} \mathbb{P}(X = x)$.

Exemples.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,3 \rrbracket)$.
   La loi de X^2 est
   La loi de $\sin(\pi X)$ est
   La loi de $\cos(\pi X)$ est
2. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $X^2 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $2^X - 1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.
3. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ alors $2X - 1 \hookrightarrow$ alors

VIII Exercices.

Exercice 5.

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges, 4 boules blanches et n boules vertes ($0 \leqslant n \leqslant 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   (a) R : « la boule tirée est rouge » ;
   (b) B : « la boule tirée est blanche » ;
   (c) V : « la boule tirée est verte ».
2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.
   Le joueur tire une boule de l'urne
   - si elle est rouge, il gagne 16 F :
   - si elle est blanche, il perd 12 F ;
   - si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
     — si celle boule est rouge, il gagne 8 F ;
     — si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
     — si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

   Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.
   Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).
   (a) Déterminer les valeurs prises par X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Montrer que l'espérance mathématique de X est $12+16\dfrac{n}{(n+7)^2}$.
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $f(x)=\dfrac{x}{(x+7)^2}$.
   Étudier les variations de f.
4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique X est maximale. Calculer celle valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

Exercice 6.

Afin de créer une loterie, on met dans une urne n billets différents (n supérieur ou égal à 3), dont deux et deux seulement sont gagnants.

1. Dans cette question, on choisit au hasard et simultanément deux billes dans l'urne.
   (a) On suppose ici $n = 10$. X désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité notée p_n, d'avoir exactement un billet gagnant parmi des deux choisis.
2. Dans cette question, on choisit au hasard deux billets dans cette urne en remettant le premier bilet tiré avant de tirer le second.
   (a) On suppose ici $n = 10$. Y désigne la variable aléatoire qui donne le nombre de billets gagnants parmi les deux choisis. Déterminer la loi de probabilité de Y.
   (b) On revient au cas général avec n supérieur ou égal à 3. Calculer la probabilité, notée q_n d avoir exactement un billet gagnant parmi les deux choisis.
3. (a) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 3, on a :

$$p_n - q_n = \frac{4(n-2)}{n^2(n-1)}.$$

   (b) En remarquant que pour tout entier $n, n-2$ est inférieur à $n-1$, déterminer un entier naturel n_0 tel que pour tout n supérieur ou égal à n_0, on ait $p_n - q_n < 10^{-\,3}$.
   (c) Pour obtenir exactement un billet gagnant en choisissant deux billets de cette loterie, est-il préférable de les tirer simultanément ou de les tirer l'un aprés l'autre en remettant le premier billet tiré ?

Exercice 7.

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher. U_1 contient n boules blanches et 3 boules noires (n est un entier supérieur ou égal à 1). U_2 contient 2 boules blanches et 1 boule noire.
On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2, puis on tire au hasard une boule de U_2 et on la met dans U_1 ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'évènement A : « après l'épreuve, les urnes se retrouvent chacune dans leur configuration de départ ».
   (a) Montrer que la probabilité $p(A)$ de l'évènement A peut s'écrire :
   $$p(A) = \frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right).$$
   (b) Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. On considère l'évènement B : « après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche ».
   Vérifier que la probabilité $p(B)$ de l'évènement B peut s'écrire
   $$p(B) = \frac{6}{4(n+3)}.$$
3. Un joueur mise 20 francs et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans U_2.
   — Si U_2 contient 1 seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ francs ;
   — Si U_2 contient 2 boules blanches, le joueur reçoit n francs ;
   — Si U_2 contient 3 boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

   (a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que n ne dépasse pas 10. ? Dans la suite, on considère $n > 10$ et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur (par exemple, si, après l'épreuve, l'urne U_2 contient une seule boule blanche, $X = 2n - 20$).
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.
   (d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Montrer qu'il en est ainsi dès que l'urne U_1 contient au moins 25 boules blanches.

Exercice 8.

Vérifiez que la suite $\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$ est une distribution de probabilité.

Exercice 9.

On pioche successivement deux boules, sans remettre la première boule, dans une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. On note X la valeur absolue de la différence des deux numéros obtenus.

1. Donnez la loi de X.
2. Même question en supposant que le tirage se fait avec remise

Exercice 10.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.
On lance n fois une pièce équilibrée les lancers étant supposés indépendants.
On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si on n'obtient aucun pile et sinon prend pour valeur le rang du premier pile.

1. Déterminez $Z(\Omega)$.
2. Calculez $\mathbb{P}(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
3. Vérifiez que $\sum_{k\in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$.

Exercice 11.

On tire deux boules au hasard, une par une et sans remise d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On appelle S la variable aléatoire égale au plus grand des deux numéros obtenus.

1. Déterminez $S(\Omega)$ puis $\mathbb{P}(S \leqslant k)$ pour tout $k \in S(\Omega)$.
2. Déduisez-en la loi de S.

Exercice 12.

Exercice 13.

On lance deux dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on gagne un nombre de points égal à la somme des deux valeurs obtenues. Si les deux dés affichent la même valeur, on gagne en plus la valeur obtenue par un lancer de dé supplémentaire.

1. Calculer l'espérance du nombre de points obtenus.
2. Un joueur a obtenu 12 points. Calculer la probabilité qu'il ait commencé par obtenir deux valeurs identiques.

Exercice 14.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On considère une urne contenant k boules rouges et $n-k$ boules blanches. On tire successivement toutes les boules de l'urne sans remise et on note X le rang de la première boule rouge.
Déterminer la loi de X et préciser son espérance.

Exercice 15.

Soit $n \geqslant 2$. Un sac contient n jetons distincts. On tire successivement et avec remise un jeton du sac jusqu'à obtenir un jeton différent du premier tiré. On note X le nombre de jetons tirés.
Justifier que $X(\Omega)$ est constitué de tous les entiers supérieurs ou égaux à 2.
Déterminer la loi de probabilité de X et justifier qu'elle admet une espérance que l'on calculera.

Exercice 16.

Une urne contient une boule blanche et une boule noire. On procède à l'expérience suivante : on tire une boule et si elle est blanche, on la remet dans l'urne avec une boule blanche supplémentaire et on recommence ; sinon on note X le nombre de tirages effectués.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'évènement « on tire n boules blanches d'affilée depuis le début de l'expérience ».

1. Calculer $\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1})$ puis $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$ puis que $(n,\mathbb{P}(X = n))$ est bien une loi de probabilité.

Exercice 17.

On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On tire successivement et avec remise une boule de l'urne en rajoutant une boule de la même couleur. On note B_n le nombre de boules blanches dans l'urne avant le n-ième tirage. En particulier, on a $B_1 = 1$.

1. Déterminer la loi de B_2 et de B_3.
2. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, exprimer la probabilité $\mathbb{P}(B_{n+1} = k)$ en fonction de la loi de B_n.
3. Déterminer la loi de probabilité de B_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18.

Oscar et Louna sont tous deux munis d'un jeu de cartes et isolés chacun dans une salle sans avoir eu le temps de se concerter. On leur demande de choisir une carte de leur paquet sachant que :

— s'ils choisissent tous les deux une carte rouge, il repartent avec 10 €,
— s'ils choisissent tous les deux une carte noire, il repartent avec 70 €,
— s'ils choisissent une carte rouge et une carte noire, il repartent avec 100 €.

Ils décident de choisir au hasard une carte de leur paquet, en s'arrangeant pour que la probabilité de choisir une carte noire soit un réel $p \in [0,1]$.

1. Montrer que l'espérance de leur gain s'écrit $180p - 120p^2 + 10$.
2. Comment choisir p pour maximiser cette espérance ? Calculer aussi l'espérance du gain dans ce cas.
3. Comment choisir au hasard une carte pour obtenir cette probabilité ?

Exercice 19.

Soit X une variable aléatoire uniforme sur $[\![1,20]\!]$. Déterminez la loi de $\lfloor \sqrt{X} \rfloor$.

Exercice 20.

Soient A et B des événements d'un espace probabilisé.
Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Exercice 21.