Événements aléatoires.

I Expérience aléatoire.

1 Expérience aléatoire, issues, univers.

2 Événements.

Définition 1

Soit :

. Ω un ensemble non vide.

On appelle *tribu* de Ω tout sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ formé d'ensembles tels que :

(i) $\Omega \in \mathscr{E}$,

(ii) Si $A \in \mathscr{E}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{E}$.

(iii) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $B_n \in \mathscr{E}$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

II Les ensembles.

1 Définition d'un ensemble.

2 Appartenance et inclusion.

Définition 2

Soient :

. A et B des ensembles.

Nous dirons que *A est inclus dans B*, ou que *A est une partie de B*, ou encore que *B contient A*, et nous noterons $A \subset B$, si et seulement si :

$$\forall a \in A, a \in B.$$

Remarques.

1. Pour démontrer que $A \subset B$ il faut démontrer que tous les éléments de A sont dans B.
2. Pour démontrer que $A \not\subset B$ il faut démontrer qu'il existe un élément de A qui n'appartient pas à B.$\notin$

3. Si $A \subset B$ alors nous dirons que *A est une partie (ou un sous-ensemble) de B.*
4. L'inclusion définie une relation d'ordre (partiel) entre ensembles : si $A \subset B$ alors A est plus petit que B au sens de l'inclusion.

Proposition 1

Soient :

. A et B des ensembles.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

3 Opérations sur les ensembles.

Définition 3

Soient :

. E un ensemble,

. $A \subset E$ et $B \subset E$.

Nous appellerons *union de A et B*, et nous noterons $A \cup B$ l'ensemble :

$$A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Nous appellerons *intersection de A et B*, et nous noterons $A \cap B$ l'ensemble :

$$A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Nous appellerons *complémentaire de A dans E*, et nous noterons A l'ensemble :

$$\complement_E(A) := \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Nous appellerons *A privé de B*, ou *A moins B*, et nous noterons $A \setminus B$ l'ensemble :

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Remarques.

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble dans lequel nous travaillons (E) on simplifie la notation du complémentaire de $\complement_E(A)$ en $\overline{A}$.

2. Une union ou une intersection quelconque d'ensembles est encore un ensemble. On généralise les précédentes définitions :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

et

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\},$$

où I est un ensemble quelconque et $(A)_{i\in\ I}$ une famille quelconque d'ensembles.

Proposition 2 - Union.

Soient :

. E un ensemble,

. A, B et C des parties de E.

(i) $A \cup \varnothing = A$.

(ii) $A \cup A = A$.

(iii) $A \cup E = E$.

(iv) $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B$.

(v) $A \cup B = B \cup A$.

(vi) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Proposition 3 - Intersection.

Soient :

. E un ensemble,

. A, B et C des parties de E.

(i) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(ii) $A \cap A = A$.

(iii) $A \cap E = A$.

(iv) $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$.

(v) $A \cap B = B \cap A$.

(vi) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Proposition 4 - Union et intersection.

Soient :

. E un ensemble,

. A, B et C des parties de E.

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(iii) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$.

Proposition 5 - Complémentaire.

Soient :

. E un ensemble,

. A une partie de E.

(i) $\complement_E(\varnothing) = E$.

(ii) $\complement_E(E) = \varnothing$.

(iii) $\complement_E(\complement_E(A)) = A$.

Proposition 6 - Union, intersection et complémentaire. Lois de De Morgan.

Soient :

. E un ensemble,

. A et B des parties de E.

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposition 7 - Différence.

Soient :

. E un ensemble,

. A et B des parties de E.

(i) $\complement_E(A) = E \setminus A$.

(ii) $A \setminus \varnothing = A$.

(iii) $A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$.

(iv) $A \setminus B = A \cap \complement_E(B) = A \setminus (A \cap B)$.

4 Images d'ensemble.

Définition 4

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une application,

. $A \subset E$ et $B \subset F$.

Nous appellerons *image de A par f*, et nous noterons $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Nous appellerons *image réciproque de B par f*, et nous noterons $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Remarques.

1.

5 Partition.

Définition 5

Soient :

. E un ensemble,

. $\mathscr{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Nous dirons que $\mathscr{P}$ est une partition de E si :

(i) $\forall A \in \mathscr{P},\ A \neq \varnothing$.

(ii) $\forall A \in \mathscr{P},\ \forall B \in \mathscr{P},\ A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

(iii) $\bigcup_{A \in \mathscr{P}} A = E$.

Remarques.

1. La condition (i) n'est pas toujours retenue dans la définition 'une partition suivant les auteurs. C'est pourquoi lorsque ce sera nécessaire nous le préciserons systématiquement.
2. Le (iii) peut être remplacé par : $\forall x \in E,\ \exists A \in \mathscr{P},\ x \in A$.

6 Taille des ensembles : cardinal.

Définition 6

Soit E un ensemble.

Si $E = \varnothing$ alors nous dirons que son cardinal est nul et nous noterons : $|E| := 0$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$ alors nous dirons que le *cardinal de E* est n et nous noterons $|E| := n$.

Si $E = n$, avec $n \in \mathbb{N}$ alors nous dirons que *E est un ensemble fini*.

S'il existe une bijection E sur $\mathbb{N}$ alors nous dirons que le cardinal est *infini dénombrable* et nous noterons : $|E| = \aleph_0$.

III Loi de probabilité.

1 Cas général.

Définition 7

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,

. $\mathbb{P} : \mathscr{E} \to [0;1]$ une application.

Nous dirons que l'application $\mathscr{P}$ est une *loi de probabilité sur* $(\Omega,\mathscr{E})$ si :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(ii) Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{E}$ deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques.

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
2. $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.
3. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ est appelé un *espace probabilisé*.

Proposition 8

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$,

. A et B des événements.

(i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(iii) $\left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_i \cap A_j\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

(iv) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

(v) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vi) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vii) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Théorème 1 - de la limite monotone.

Soient :

1. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,
2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Corollaire 1

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \text{ et } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

2 Univers fini.

Théorème 2 - Distribution de probabilité sur les événements élémentaires.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble (fini)

. $(p_1, \dots, p_n) \in [0;1]^n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Et alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i \in [\![1,n]\!] \\ \omega_i \in A}} p_i$$

Remarques.

1. Ce résultat explique pourquoi on parle de *distribution de probabilité* plutôt que de loi de probabilité dans ce cas. On une probabilité totale de 1 qu'on a distribué aux différentes issus.
2. Lorsque le nombre d'issues n'est pas trop grand nous définirons $\mathbb{P}$ en précisant ses images sur les événements élémentaires grâce à un tableau de valeurs :

Événements élémentaires	$\{\omega_1\}$	$\dots$	$\{\omega_2\}$
$\mathbb{P}(\{\omega_i\})$	p_1	$\dots$	p_n

3 Loi uniforme discrète.

Corollaire 2

Soient $(\Omega, \mathscr{E})$ un espace probabilisable fini.

Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{E})$, appelée *loi uniforme discrète*, pour laquelle toutes les issues sont équiprobables.
On a alors

$$\forall A \in \mathscr{E},\ \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

4 Univers discret (infini dénombrable).

IV Probabilité conditionnelle.

1 Définition.

Définition 8

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. $A \in \mathscr{P}$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$.

Pour tout $B \in \mathscr{E}$, nous appellerons *probabilité de B sachant A*, et nous noterons $\mathbb{P}(B|A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$, le réel :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition 9

L'application $\mathbb{P}_A : \mathscr{E} \to [0;1]$ qui à tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe $\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur Ω.

2 Formule des probabilités composées.

Théorème 3 - Formule des probabilités composées.

Soient $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{E}^n$.

Si

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$$

alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots A_{n-1})$$

Remarques.

1. Nous retrouvons le résultat appelé principe multiplicatif (ou principe des bergers) utilisé pour calculer la probabilité d'un chemin sur un arbre probabiliste au lycée, $A_1 \cap \dots \cap A_i$ désignant un chemin sur l'arbre probabiliste.

3 Formule des probabilités totales.

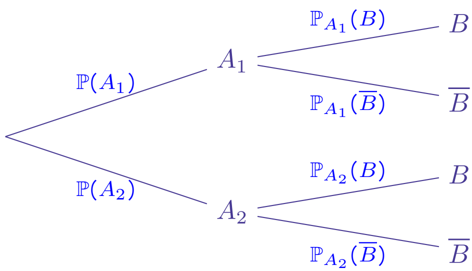
Théorème 4 - Formule des probabilité totales

Soient $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_1,\ldots,A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Pour tout $B \in \mathscr{E}$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)$$

Remarques.

1. Ce résultat qui est vu en classe terminale est en général utilisé dans le cas d'arbres probabilistes. Il s'agit le plus souvent de retrouver la probabilité d'un événement qui apparaît dans plusieurs chemins :



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B).$$

2. Il n'est pas indispensable d'avoir un système complet d'événements. Il suffit d'événements disjoints deux à deux dont la réunion contient B. Autrement dit plutôt que : $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, il suffit de $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \supset B$. En effet dans ce cas : $B = B \cup \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$.

4 Formule de Bayes.

Théorème 5 - Formule Bayes

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $B \in \mathscr{E}$ un événement tel que : $\mathbb{P}(B) > 0$,

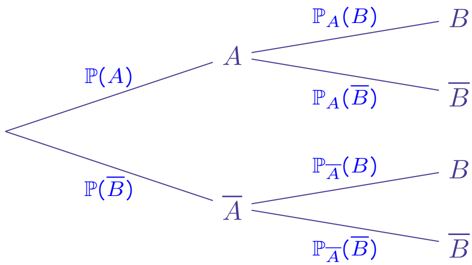
. $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\{A_1,\ldots,A_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles alors

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}.$$

Remarques.

1. Pour $n = 1$ on retrouve la définition de la probabilité conditionnelle. Quelque soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$
$$\mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$
L'idée serait d'intervertir les deux niveaux de l'arbre suivant :



Nous dirons que $\mathbb{P}(A)$ est une *probabilité a priori* (en l'état initial des connaissances, de la situation) et que $\mathbb{P}_B(A)$ est *la probabilité a posteriori* (en ajoutant une nouvelle information qui est la réalisation de B).

2. Inférence bayésienne.

V Exercice.