

# Événements aléatoires.

## I Expérience aléatoire.

- 1 Expérience aléatoire, issues, univers.
- 2 Événements.

## II Les ensembles.

- 1 Définition d'un ensemble.
- 2 Appartenance et inclusion.
- 3 Opérations sur les ensembles.
- 4 Images d'ensemble.

Exercice 1.

Montrez que si  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto 2x_1 - 7x_2 = 0 \end{cases}$  alors  $f^{-1}(\{0\})$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

- 5 Partition.
- 6 Taille des ensembles : cardinal.

## III Loi de probabilité.

- 1 Cas général.
- 2 Univers fini.
- 3 Loi uniforme discrète.

Exercice 2.

Un dé pipé présente la particularité de tomber deux fois plus souvent sur le 6 que sur chacune des cinq autres faces (lesquelles ont la même probabilité d'apparaître). Quelle est sa loi de probabilité ?

Exercice 3.

Une loi de probabilité sur l'ensemble  $\{1; 2; 3; 4; 5\}$  suit une progression arithmétique. Montrer que  $\mathbb{P}(\{3\})$  vaut  $1/5$ . Quelle est la plus grande raison possible ?

Exercice 4.

Quelle est la probabilité qu'un individu quelconque soit né un 29 février ?

Exercice 5.

Sur les 38 élèves de la classe, dix-sept proviennent de la spécialité SES, trois de la spécialité HLP et dix-huit de la spécialité maths (événements disjoints). On choisit deux élèves distincts dans la classe de façon équiprobable. Quelle est la probabilité que les deux élèves soient issus de SES ? Quelle est la probabilité qu'ils soient issus de sections différentes ?

Exercice 6.

Quelle est la probabilité de deviner les trois premières places d'une course de huit chevaux si tous les classements sont équiprobables ?

Exercice 7.

Décrire un univers probabilisé correspondant au lancer de deux dés standards distincts, puis calculer la probabilité que la somme des deux résultats soit paire et la probabilité que le produit des deux résultats soit pair.

Exercice 8.

Soit  $n \geq 2$ . Sur la piste de danse,  $n$  couples ( $n$  hommes,  $n$  femmes) dansent ensemble, puis sont séparés à la fin de la première danse. Pour la deuxième danse, on forme au hasard  $n$  couples avec les  $n$  hommes et les  $n$  femmes.

Quelle est la probabilité que tous les couples initiaux soient reconstitués pour la deuxième danse ?

Exercice 9.

Un sac contient des jetons indiscernables au toucher, chaque jeton portant une lettre de l'alphabet. Chaque lettre de l'alphabet est portée par un nombre de jetons égal à son rang dans l'alphabet (Un seul jeton A, deux jetons B... jusqu'à 26 jetons Z). On tire simultanément deux jetons du sac. Calculer la probabilité que les deux jetons portent la même lettre.

Exercice 10.

On tire au hasard deux dominos distincts. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double ? Quelle est la probabilité que les deux dominos aient une valeur en commun ?

Exercice 11.

On tire simultanément au hasard trois boules d'une urne qui contient 4 boules rouges, 5 blanches et 7 jaunes.

Déterminez la probabilité d'obtenir :

1. Un tirage monocolore.
2. Un tirage tricolore.
3. Un tirage bicolore.

## 4 Univers discret (infini dénombrable).

### Exercice 12.

### Exercice 13.

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On note pour  $i \in \mathbb{N}^*$ ,  $A_i$  : « On obtient le premier face au  $i$ -ème lancer » et  $A_0$  : « On n'obtient jamais face ». Montrer que  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  forme un système complet d'événements.

## IV Probabilité conditionnelle.

### 1 Définition.

### Exercice 14.

On lance une fois un dé parfait. On sait que le résultat est un nombre inférieur ou égal à 5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ?

### Exercice 15.

Dans une usine, deux lignes de montage fabriquent des composants électroniques. La ligne  $A$  fabrique 70 % des composants. Le reste est fabriqué par la ligne  $B$ . La ligne  $A$  a un taux de composants défectueux en sortie de 0,5 %. Pour la ligne  $B$ , ce taux est de 0,4 %. On choisit au hasard un composant à la sortie de l'usine.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait été fabriqué par la ligne  $A$  et présente un défaut ?
2. Calculez la probabilité que ce composant présente un défaut.
3. En déduire, le composant présentant un défaut, la probabilité que ce composant ait été fabriqué sur la ligne  $A$ .

## Exercice 16.

La cuisine  $A$  et la salle d'un restaurant  $B$  sont reliées entre elles de la façon suivante :  $A$  ouvre sur  $B$  et  $B$  ouvre sur l'extérieur. Une mouche initialement dans la cuisine souhaite y rester. Mais elle ne contrôle pas son trajet qui est aléatoire et régi par les règles suivantes : à chaque instant si elle est dans la pièce  $A$ , elle reste dans la pièce  $A$  avec une probabilité de  $\frac{1}{3}$  et passe dans la pièce  $B$  avec une probabilité de  $\frac{2}{3}$  ; si elle est dans la pièce  $B$ , elle reste dans la pièce  $B$  avec une probabilité de  $\frac{1}{2}$ , passe dans la pièce  $A$  avec une probabilité de  $\frac{1}{4}$  et sort à l'air libre avec une probabilité de  $\frac{1}{4}$ . Si elle sort elle ne rentre plus.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  l'événement « la mouche est dans la pièce  $A$  à l'instant  $n$  » et  $B_n$  l'événement « la mouche est dans la pièce  $B$  à l'instant  $n$  ». On considère  $a_n$  et  $b_n$  leur probabilités respectives.

1. Justifiez que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1})$  et  $B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$ .  
Déduisez-en que  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$  et  $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$ .
2. Montrez que pour tout entier naturel  $n$ ,  $b_{n+1} = 2a_{n+1}$ .
3. Déduisez-en pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n$  en fonction de  $n$ . Calculez sa limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Interprétez ce résultat.

Exercice 17.

Dans un zoo l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeur.

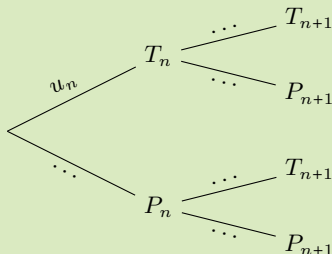
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Si un manchot choisit le plongeur, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.

Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on considère les événements  $T_n$  : « le manchot utilise le toboggan lors de son  $n$ -ième passage » et  $P$  : « le manchot utilise le plongeur lors de son  $n$ -ième passage ».

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$  par  $u_n = \mathbb{P}(T_n)$ .

1. (a) Donnez les valeurs de  $\mathbb{P}(T_1)$ ,  $\mathbb{P}(P_1)$ ,  $\mathbb{P}_{T_1}(T_2)$  et  $\mathbb{P}_{P_1}(T_2)$ .
- (b) Montre que  $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{4}$ .
- (c) Recopiez et complétez l'arbre ci-dessous.



- (d) Démontrez que pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2.$$

2. On considère la suite  $(v_n)$  définie, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , par  $v_n = u_n - \frac{2}{9}$ .
  - (a) Démontrez que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{10}$ . Précisez son premier terme.
  - (b) Exprimez  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - (c) Calculez la limite de la suite  $(u_n)$ .

## 2 Formule des probabilités composées.

Remarques.

1. Nous retrouvons le résultat appelé principe multiplicatif (ou principe des bergers) utilisé pour calculer la probabilité d'un chemin sur un arbre probabiliste au lycée,  $A_1 \cap \dots \cap A_i$  désignant un chemin sur l'arbre probabiliste.

## Exercice 18.

Une épreuve consiste à lancer indéfiniment une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $A_n$  l'événement « on obtient au moins un pile pendant les  $n$  premiers lancers ».

Pour tout entier naturel  $k$  non nul, on note  $E_k$  l'événement « le premier Pile apparaît lors du  $k$ -ième lancer ».

Déterminez la probabilité  $E_k$  puis déduisez-en celle de  $A_n$ .

## Exercice 19.

Une urne contient  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires indiscernables. On tire successivement une boule jusqu'à obtenir une boule noire. Le jeu s'arrête alors.

1. on effectue les tirages avec remise. Quel est la probabilité que le jeu s'arrête à l'étape  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  ?
2. On effectue le tirage sans remise. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête à l'étape  $n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  ?

### 3 Formule des probabilités totales.

## Exercice 20.

On dispose de 3 urnes  $U_1, U_2, U_3$ , chacune contient 10 boules ; parmi elles,  $U_1$  contient 1 blanche,  $U_2$  contient 2 blanches, et  $U_3$  contient 6 blanches. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

## Exercice 21.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.

Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage.

## Exercice 22.

Une personne appelle au hasard un service téléphonique et tombe sur la ligne occupée. On considère que si la ligne est occupée à un instant, elle reste occupée à l'instant d'après avec une probabilité de  $\frac{2}{3}$  et que si elle est libre à un instant, elle redevient occupée à l'instant d'après avec une probabilité de  $\frac{5}{6}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $A_n$  l'événement « la ligne est occupée à l'instant  $n$  » et  $a_n$  sa probabilité.

Déterminez  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ , puis déduisez-en  $a_n$  en fonction de  $n$  entier naturel.

## 4 Formule de Bayes.

### Exercice 23.

Une information circule parmi les étudiants. Chaque étudiant la transmet fidèlement avec une probabilité  $p \in ]0; 1[$  et la déforme en son contraire avec une probabilité  $q = 1 - p$ . Le premier étudiant détient la bonne information.

1. Quelle est la probabilité que le deuxième étudiant détienne la bonne information ?
2. Quelle est la probabilité que le troisième étudiant détienne la bonne information ?
3. Quelle est la probabilité que le deuxième étudiant détienne la bonne information sachant que le troisième étudiant est bien informé ?

## V Exercice.

### Exercice 24.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.

On suppose que le second tirage a donné une boule blanche, quelle est la probabilité que le premier tirage ait donné une boule blanche ?

### Exercice 25.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

### Exercice 26.

On fait l'hypothèse que la probabilité de mettre au monde une fille est de  $\frac{1}{2}$ .

M. X et Mme Y ont deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils aient deux filles ?

On arrive chez eux. Un enfant ouvre la porte. C'est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ?

Et si en plus, elle nous dit qu'elle est l'aînée, quelle est la probabilité que la seconde soit une fille ?

### Exercice 27.

Une urne contient 9 boules, numérotées de 1 à 9.

On tire deux boules.

Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas et on tire une deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet et on tire une deuxième boule.

Exercice 28.

Exercice 29.

$\frac{1}{4}$  d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte  $\frac{1}{12}$  de malades. Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

Exercice 30.

On range au hasard 7 dossiers numérotés de 1 à 7 dans 5 tiroirs  $a, b, c, d, e$ . Quelle est la probabilité des évènements suivants ?

1. Les 7 dossiers sont dans un même tiroir.
2. Les 7 dossiers sont dans 2 tiroirs exactement.
3. Les 7 dossiers sont dans 3 tiroirs exactement.
4. Les 7 dossiers sont dans 4 tiroirs exactement.
5. Aucun des tiroirs n'est vide.

Exercice 31.

Un jeu de cartes est constitué de 20 cartes dont 17 portent le numéro 0 et 3 le numéro 1.

Un joueur tire au hasard simultanément 4 cartes de ce jeu ; il gagne s'il obtient au moins deux 1.

Quelle est la probabilité qu'il gagne ?

Exercice 32.

Soient  $A$  et  $B$  deux évènements tels que  $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$ . Trouver les valeurs maximales et minimales de  $\mathbb{P}(A \cap B)$ .

Exercice 33.

On jette trois fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note  $a, b$  et  $c$  les numéros obtenus. Soit  $Q(x) = ax^2 + bx + c$ .

Déterminer la probabilité pour que l'équation du second degré ait :

1. deux racines réelles distinctes,
2. une racine réelle double,
3. pas de racines réelles.

Exercice 34.



Exercice 35.

On lance une pièce une infinité de fois. On note pour  $n \geq 3$ ,  $B_n$  l'événement « on obtient face au  $(n - 2)$ -ème lancer, pile au  $(n - 1)$ -ème lancer et pile au  $n$ -ème lancer ». Pour  $n \geq 3$ , les événements  $B_n$  et  $B_{n+2}$  sont-ils incompatibles ?

Exercice 36.

On dispose d'une urne avec 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. On tire une boule dans l'urne :

- Si elle est verte, on perd 5 euros.
- Si elle est bleue, on joue à pile ou face : on gagne 10 euros si on fait face, et on perd 10 euros si on fait pile.
- Si elle est rouge, on gagne 3 euros.

On note  $V$  : « on obtient la boule verte »,  $B$  : « On obtient la boule bleue »,  $R$  : « On obtient la boule rouge »,  $F$  : « On fait face au jeu pile ou face », et  $G$  : « On gagne de l'argent ».

Justifiez que  $G = (B \cup F) \cup R$ .

Exercice 37.

Soit  $n \geq 2$ . On dispose de  $n$  dés. Pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le  $k$ -ème dé est un dé à  $k$  faces numérotées de 1 à  $k$ .

On lance tous les dés l'un après l'autre. Un lancer est considéré comme gagnant si le dé tombe sur 1.

Quelle est la probabilité de gagner au moins deux lancers de dés ?

Exercice 38.

## Exercice 39.

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines.

Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien.

Pour un certain type de machines, le technicien constate :

- qu'il doit intervenir la première semaine,
- que s'il est intervenu la  $n$ -ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la  $(n+1)$ -ième semaine est égale à  $\frac{3}{4}$ ,
- que s'il n'est pas intervenu la  $n$ -ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la  $(n+1)$ -ième semaine est égale à  $\frac{1}{10}$ .

On désigne par  $E_n$  l'évènement : « le technicien intervient la  $n$ -ième semaine » et par  $p_n$  la probabilité de cet évènement  $E_n$ .

1. Déterminez les nombres :  $p(E_1)$ ,  $p(E_{n+1}|E_n)$  et  $p(E_{n+1}|\overline{E_n})$ , puis en fonction de  $p_n$  :  $p(E_{n+1} \cap E_n)$  et  $p(E_{n+1}|\overline{E_n})$ .
2. Déduisez-en que pour tout entier  $n$  non nul :

$$p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}.$$

3. On pose  $q_n = p_n - \frac{2}{7}$ .

Montrez que la suite  $(q_n)$  est une suite géométrique. Déduisez-en l'expression de  $p_n$  en fonction de  $n$ .

Pour quelles valeurs de l'entier  $n$ , la probabilité que le technicien intervienne la  $n$ -ième semaine est-elle inférieure à  $\frac{3}{10}$ .

Exercice 40.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un ou l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

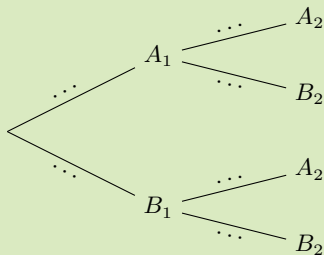
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on définit les évènements suivants :

- $A_n$  : « le vélo se trouve au point A le  $n$ -ième matin »
- $B_n$  : « le vélo se trouve au point B le  $n$ -ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on note  $a_n$  la probabilité de l'évènement  $A_n$  et  $b_n$  la probabilité de l'évènement  $B_n$ . Ainsi  $a_1 = 0,5$  et  $b_1 = 0,5$ .

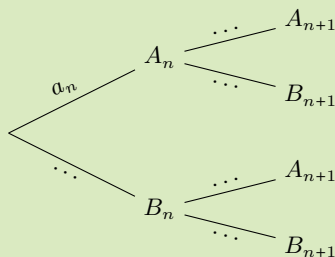
1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :



2. (a) Calculer  $a_2$ .  
 (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millièmè.

Exercice 40. - suite.

3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les  $n$ -ième et  $n + 1$ -ième matins.



- (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,24$ .
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ .
5. Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$  et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
6. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $a_n \geq 0,599$  et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 41.

Une urne contient  $n$  boules noires et  $b$  boules blanches et on tire 2 boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche ?

Exercice 42.

Dans une usine, trois machines  $A$ ,  $B$  et  $C$  produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses sont 3 % pour  $A$ , 4 % pour  $B$  et 5 % pour  $C$ . Une pièce choisie au hasard se trouve défectueuse. Avec quelle probabilité a-t-elle été fabriquée par la machine  $A$  ?

Exercice 43.

<sup>2</sup> Dans une population donnée, deux maladies  $M_1$  et  $M_2$  sont observables chez respectivement 10 % et 20 % des individus. On suppose que le nombre des malchanceux qui souffrent à la fois de  $M_1$  et  $M_2$  est négligeable (nul), pour simplifier. On entreprend un dépistage systématique de ces maladies au moyen d'un test unique. Ce test est positif pour 90 % des malades de  $M_1$ , 70 % des malades de  $M_2$  et 10 % des individus sains.

1. Pour un individu choisi au hasard, avec quelle probabilité le test est-il positif ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pour lequel le test est positif soit atteint de la maladie  $M_1$  ? Même question avec  $M_2$  ?

## Exercice 44.

On dispose de 4 dés à 6 faces, dont un pipé, qui tombe sur 1 avec une probabilité de  $\frac{5}{6}$  et donne une même probabilité aux autres faces. On choisit au hasard un dé parmi les 4, on le lance  $2n$  fois et on obtient  $n$  fois l'entier 1. Avec quelle probabilité le dé choisi est-il pipé ?