Événements aléatoires.

I Expérience aléatoire.

1 Expérience aléatoire, issues, univers.

Une *expérience aléatoire* est un dispositif expérimental qui permet de reproduire une expérience dont on ne peut prévoir exactement l'*issue* (ou résultat).

L'ensemble de toutes les issues possibles est appelé l'*univers* de l'expérience et est noté Ω.

Exemples.

1. Jouer à pile ou face est une expérience aléatoire. $\Omega = \{P,F\}$.
2. Lancer un dé à six faces est une expérience aléatoire. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
3. Compter le nombre de piles obtenus an laçant 20 fois une pièce est une expérience aléatoire. $\Omega = [\![0,20]\!]$.
4. Noter le nombre de lancers d'une pièce de monnaie nécessaires pour obtenir pour la première fois un pile est une expérience aléatoire. $\Omega = \mathbb{N}^*$.
5. Se présenter à un concours sans l'avoir préparé par un travail assidu n'est pas une expérience aléatoire, c'est une expérience déterministe puisqu'il n'y a qu'une issue : l'échec.
6. On lance deux dés équilibrés jusqu'à ce que la somme des numéros obtenus soit un multiple de cinq. Dans ce cas Ω s'apparente à $[\![2,12]\!]^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites à termes dans $\{2,3,4,\ldots,12\}$.

2 Événements.

Les issues sont regroupées en ensembles appelés *événements*. Autrement dit un événement est une partie de Ω.

L'ensemble de tous les événements possibles est noté $\mathscr{E}$.

Exemples.

1. Si $\Omega = \{P,F\}$ alors $\{P\}$ et $\{F\}$ sont des événements qui sont appelés *événements élémentaires*.
2. Si $\Omega = [\![0;20]\!]$ alors $\varnothing$, $\{1,3,12\}$, $\{0,1,20\}$ ou $[\![0,20]\!]$ sont des événements.
3. Si $\Omega = \mathbb{N}^*$ alors l'ensemble des entiers pairs non nuls, $2\mathbb{N} \setminus \{0\}$, est un événement.

Les événements sont des ensembles et les outils ensemblistes se retrouvent donc ici, cependant il existe souvent une formulation spécifique aux probabilités.

Ensembles	Probabilités
Singleton $\{\omega\}$.	Événement élémentaire.
Ω	Événement certain.
$\varnothing$	Événement impossible.
$\omega \in A$	L'événement A est réalisé par ω.
$A \cup B$	Événement A ou B.
$A \cap B$	Événement A et B.
$\overline{A}$	Événement contraire de A.
Disjoints : $A \cap B = \varnothing$	Les événements A et B sont incompatibles.
$A \subset B$	Si A est réalisé alors B est réalisé.
Partition	Système complet d'événements.

Exemples.

Expérience aléatoire : un lancer de dé à 6 faces.

1. L'événement certain est $\Omega = [\![1,6]\!]$ que l'on peut décrire par « obtenir un entier entre 1 et 6 ».
2. L'événement impossible est toujours $\varnothing$. On peut ici le décrire par « obtenir 7 ».
3. L'événement A : « obtenir un nombre pair » peut aussi s'écrire : $A = \{2,4,6\}$.

L'événement $B = \{3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ peut être décrit par B :« obtenir un nombre strictement supérieur à 2 ».

4. A est réalisé par les issues 2, 4 ou 6.
5. L'événement « obtenir un nombre pair ou strictement supérieur à 2 » est $A \cup B = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$
6. L'événement « obtenir un nombre pair et strictement supérieur à 2 » est $A \cap B = \{4; 6\}$

Le choix des événements d'un univers peut poser des difficultés pour un univers infini non dénombrable.

Les attentes vis-à-vis des événements :

— le contraire d'un événement doit être encore un événement,

— une union ou une intersection de deux événements doit être encore un événement,

— $\varnothing$ et Ω doivent être des événements,

— que l'ensemble des événements ne soit pas inutilement gros,

—

Exemples.

1. Dans un lycée parmi les 400 élèves de classes préparatoires, dont 250 économiques et 150 littéraires on choisit au hasard un élève. On note S_1 l'événement « l'élève choisi est en voie économique ». Et l'on souhaite calculer la probabilité de S_1.

   L'univers ayant 400 issues, $\mathcal{P}(\Omega)$ regroupe 2^{400} événements. Mais ici les événements $\varnothing$, S_1, $\overline{S_1}$, Ω suffisent amplement pour décrire la situation.
2. Un pile ou face joué indéfiniment peut être modélisé par un univers $\{0; 1\}^{\mathbb{N}}$. En notant X_i la valeur prise lors du lancer de rang $i \in \mathbb{N}$. Il est naturel de considérer comme événements les ensembles $\{\omega \mid X_0(\omega) \in A_1, \dots X_k(\omega) \in A_k\}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et A_i un sous-ensemble de $\{0; 1\}$. Ces ensembles forment une algèbre de parties. Cependant il est un événement qui manque c'est l'événement $\left\{\omega \mid \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{X_i(\omega)}{n}\right\}$. Or cette limite et celle qui correspond à l'idée intuitive de convergence de la fréquence d'un échantillon vers la probabilité.

Définition 1

Soit :
. Ω un ensemble non vide.

On appelle *tribu* de Ω tout sous-ensemble $\mathscr{E}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ formé d'ensembles tels que :

(i) $\Omega \in \mathscr{E}$,

(ii) Si $A \in \mathscr{E}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{E}$.

(iii) Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $B_n \in \mathscr{E}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

Cette année nous considérerons toujours que l'ensemble des événements $\mathscr{E}$ convient sans le justifier.

Si Ω et un univers et $\mathscr{E}$ une tribu sur Ω alors on dit que le couple $(\Omega,\mathscr{E})$ est un *espace probabilisable*.

Exemples.

1. Si Ω est une ensemble fini alors $\mathscr{E} = \mathscr{P}(\Omega)$ est appelée la tribu discrète. C'est celle qu'implicitement on utilise toujours au lycée.
2. $\mathscr{E} = \{\varnothing,\Omega\}$ est appelé la tribu grossière.

II Les ensembles.

Les objets et résultats vus ici ont une portée très importante en mathématique qui dépasse largement les probabilités.

1 Définition d'un ensemble.

Nous appellerons *ensemble* une collection d'objets clairement définis et distincts. L'un de ces objets est appelé un *élément* de l'ensemble.

Les éléments d'un ensemble sont dits *appartenir à l'ensemble* et on utilise le symbole $\in$. Pour indiquer qu'un élément n'est pas dans un ensemble nous écrirons $\notin$.

Très souvent nous décrirons les ensembles comme collections d'objets appartenant à un autre ensemble déjà connu et ayant une propriété commune : $\{x \in E \mid P(x)\}$, où P est une proposition (une phrase qui est soit vraie soit fausse). Dans ce cas l'ensemble est formé des éléments de E qui vérifient la proposition P.

Exemples.

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$.
2. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 1 \text{ ou } x = 3\}$ est noté plus simplement $\{1;3\}$.

3. Si $A \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $\{M \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in [0,1],\ M = A + \lambda \cdot u\}$ est un segment affine de $\mathbb{R}^n$.
4. Si $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ alors $\{t \cdot u \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}^n\}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$.
5. Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left\{M(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ est le cercle de rayon 1 dont le centre est l'origine du repère.
6. L'ensemble vide est $\varnothing = \{\}$.
7. Un ensemble avec un seul élément est appelé un *singleton*.

2 Appartenance et inclusion.

Définition 2

Soient :

. A et B des ensembles.

Nous dirons que *A est inclus dans B*, ou que *A est une partie de B*, ou encore que *B contient A*, et nous noterons $A \subset B$, si et seulement si :

$$\forall a \in A,\ a \in B.$$

Exemples.

1. Exemple.
2. Contre exemple.
3. Pour tout ensemble E : $\varnothing \subset E$.
4. L'ensemble de toutes les parties d'un ensemble est un ensemble que nous noterons $\mathcal{P}(E)$.
5. Pour tout ensemble E : $E \subset E$.

Remarques.

1. Pour démontrer que $A \subset B$ il faut démontrer que tous les éléments de A sont dans B.
2. Pour démontrer que $A \not\subset B$ il faut démontrer qu'il existe un élément de A qui n'appartient pas à B.$\notin$
3. Si $A \subset B$ alors nous dirons que *A est une partie (ou un sous-ensemble) de B*.
4. L'inclusion définie une relation d'ordre (partiel) entre ensembles : si $A \subset B$ alors A est plus petit que B au sens de l'inclusion.

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.
Mais pour démonter l'égalité de deux ensembles nous utiliserons souvent :

Proposition 1

Soient :
. A et B des ensembles.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)\,.$$

3 Opérations sur les ensembles.

Définition 3

Soient :
. E un ensemble,
. $A \subset E$ et $B \subset E$.

Nous appellerons *union de A et B*, et nous noterons $A \cup B$ l'ensemble :

$$A \cup B := \{x \in E \,|x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Nous appellerons *intersection de A et B*, et nous noterons $A \cap B$ l'ensemble :

$$A \cap B := \{x \in E \,|x \in A \text{ et } x \in B\}.$$

Nous appellerons *complémentaire de A dans E*, et nous noterons A l'ensemble :

$$\complement_E(A) := \{x \in E \,|x \notin A\}.$$

Nous appellerons *A privé de B*, ou *A moins B*, et nous noterons $A \setminus B$ l'ensemble :

$$A \setminus B := \{x \in A \,|x \notin B\}.$$

Exemples.

1. Lorsque $A \cap B = \varnothing$ on dit que les ensembles *A et B sont disjoints.*

Remarques.

1. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble dans lequel nous travaillons (E) on simplifie la notation du complémentaire de $\complement_E(A)$ en $\overline{A}$.
2. Une union ou une intersection quelconque d'ensembles est encore un ensemble. On généralise les précédentes définitions :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I,\, x \in A_i\}$$

et

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I,\, x \in A_i\},$$

où I est un ensemble quelconque et $(A)_{i\in\ I}$ une famille quelconque d'ensembles.

Proposition 2 - Union.

Soient :

. E un ensemble,

. A, B et C des parties de E.

(i) $A \cup \varnothing = A$.

(ii) $A \cup A = A$.

(iii) $A \cup E = E$.

(iv) $A \cup B = B \Longleftrightarrow A \subset B$.

(v) $A \cup B = B \cup A$.

(vi) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Proposition 3 - Intersection.

Soient :

. E un ensemble,

. A, B et C des parties de E.

(i) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

(ii) $A \cap A = A$.

(iii) $A \cap E = A$.

(iv) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$.

(v) $A \cap B = B \cap A$.

(vi) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Proposition 4 - Union et intersection.

Soient :

. E un ensemble,

. A, B et C des parties de E.

(i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

(ii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

(iii) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$.

Proposition 5 - Complémentaire.

Soient :

. E un ensemble,

. A une partie de E.

(i) $\complement_E(\varnothing) = E$.

(ii) $\complement_E(E) = \varnothing$.

(iii) $\complement_E(\complement_E(A)) = A$.

Proposition 6 - Union, intersection et complémentaire. Lois de De Morgan.

Soient :

. E un ensemble,

. A et B des parties de E.

(i) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposition 7 - Différence.

Soient :

. E un ensemble,

. A et B des parties de E.

(i) $\complement_E(A) = E \setminus A$.

(ii) $A \setminus \varnothing = A$.

(iii) $A \setminus B = \varnothing \iff A \subset B$.

(iv) $A \setminus B = A \cap \complement_E(B) = A \setminus (A \cap B)$.

4 Images d'ensemble.

Définition 4

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une application,

. $A \subset E$ et $B \subset F$.

Nous appellerons *image de A par f*, et nous noterons $f(A)$ l'ensemble :

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

Nous appellerons *image réciproque de B par f*, et nous noterons $f^{-1}(B)$ l'ensemble :

$$f^{-1}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Exemples.

1. Exemple.
2. Si B est un singletons alors $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des

Remarques.

1.

Exercice 1.

Montrez que si $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \mapsto & 2x_1 - 7x_2 = 0 \end{array} \right.$ alors $f^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

5 Partition.

Définition 5

Soient :

. E un ensemble,

. $\mathscr{P}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Nous dirons que $\mathscr{P}$ est une partition de E si :

(i) $\forall A \in \mathscr{P},\ A \neq \varnothing$.

(ii) $\forall A \in \mathscr{P},\ \forall B \in \mathscr{P},\ A \neq B \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.

(iii) $\bigcup_{A \in \mathscr{P}} A = E$.

Remarques.

1. La condition (i) n'est pas toujours retenue dans la définition 'une partition suivant les auteurs. C'est pourquoi lorsque ce sera nécessaire nous le préciserons systématiquement.
2. Le (iii) peut être remplacé par : $\forall x \in E,\ \exists A \in \mathscr{P},\ x \in A$.

Exemples.

1. $\mathscr{P} = \{E\}$ est une partition de E.
2. Si $A \subset E$ et $A \neq \varnothing$ alors $\mathscr{P} = \{A, \overline{A}\}$ est une partition de E.

6 Taille des ensembles : cardinal.

Définition 6

Soit E un ensemble.

Si $E = \varnothing$ alors nous dirons que son cardinal est nul et nous noterons : $|E| := 0$.

S'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$ alors nous dirons que le *cardinal de E* est n et nous noterons $|E| := n$.

Si $E = n$, avec $n \in \mathbb{N}$ alors nous dirons que *E est un ensemble fini*.

S'il existe une bijection E sur $\mathbb{N}$ alors nous dirons que le cardinal est *infini dénombrable* et nous noterons : $|E| = \aleph_0$.

III Loi de probabilité.

1 Cas général.

Définition 7

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable,

. $\mathbb{P} : \mathscr{E} \to [0;1]$ une application.

Nous dirons que l'application $\mathscr{P}$ est une *loi de probabilité sur $(\Omega,\mathscr{E})$* si :

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

(ii) Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{E}$ deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i).$$

Remarques.

1. $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.
2. $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.
3. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ est appelé un *espace probabilisé*.

Proposition 8

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$,

. A et B des événements.

(i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

(ii) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

(iii) $\left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ A_i \cap A_j\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$.

(iv) $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

(v) $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vi) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

(vii) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Démonstration

Théorème 1 - de la limite monotone.

Soient :

1. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,
2. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$.

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Démonstration

$B_n = A_n - A_{n-1}$ et $B_0 = a_0$.
$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} A_n\right) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1}) = \mathbb{P}(A_n).$$

■

Corollaire 1

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{E}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \text{ et } \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

2 Univers fini.

Théorème 2 - Distribution de probabilité sur les événements élémentaires.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble (fini)

. $(p_1, \ldots, p_n) \in [0;1]^n$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Et alors

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) = \sum_{\substack{i\in[\![1,n]\!]\\ \omega_i\in A}} p_i$$

Remarques.

1. Ce résultat explique pourquoi on parle de *distribution de probabilité* plutôt que de loi de probabilité dans ce cas. On une probabilité totale de 1 qu'on a distribué aux différentes issus.
2. Lorsque le nombre d'issues n'est pas trop grand nous définirons $\mathbb{P}$ en précisant ses images sur les événements élémentaires grâce à un tableau de valeurs :

Événements élémentaires	$\{\omega_1\}$	$\ldots$	$\{\omega_2\}$
$\mathbb{P}(\{\omega_i\})$	p_1	$\ldots$	p_n

3 Loi uniforme discrète.

Corollaire 2

Soient $(\Omega,\mathscr{E})$ un espace probabilisable fini.

Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega,\mathscr{E})$, appelée *loi uniforme discrète*, pour laquelle toutes les issues sont équiprobables.
On a alors

$$\forall A \in \mathscr{E},\ \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Exemples.

1. Loi uniforme discrète : issues équiprobables.
2.

Exercice 2.
Un dé pipé présente la particularité de tomber deux fois plus souvent sur le 6 que sur chacune des cinq autres faces (lesquelles ont la même probabilité d'apparaître). Quelle est sa loi de probabilité ?

Exercice 3.
Une loi de probabilité sur l'ensemble $\{1;2;3;4;5\}$ suit une progression arithmétique. Montrer que $\mathbb{P}(\{3\})$ vaut $1/5$. Quelle est la plus grande raison possible ?

Exercice 4.
Quelle est la probabilité qu'un individu quelconque soit né un 29 février ?

Exercice 5.
Sur les 38 élèves de la classe, dix-sept proviennent de la spécialité SES, trois de la spécialité HLP et dix-huit de la spécialité maths (événements disjoints). On choisit deux élèves distincts dans la classe de façon équiprobable. Quelle est la probabilité que les deux élèves soient issus de SES ? Quelle est la probabilité qu'ils soient issus de sections différentes ?

Exercice 6.
Quelle est la probabilité de deviner les trois premières places d'une course de huit chevaux si tous les classements sont équiprobables ?

Exercice 7.
Décrire un univers probabilisé correspondant au lancer de deux dés standards distincts, puis calculer la probabilité que la somme des deux résultats soit paire et la probabilité que le produit des deux résultats soit pair.

Exercice 8.
Soit $n \geqslant 2$. Sur la piste de danse, n couples (n hommes, n femmes) dansent ensemble, puis sont séparés à la fin de la première danse. Pour la deuxième danse, on forme au hasard n couples avec les n hommes et les n femmes.
Quelle est la probabilité que tous les couples initiaux soient reconstitués pour la deuxième danse ?

Exercice 9.
Un sac contient des jetons indiscernables au toucher, chaque jeton portant une lettre de l'alphabet. Chaque lettre de l'alphabet est portée par un nombre de jetons égal à son rang dans l'alphabet (Un seul jeton A, deux jetons B... jusqu'à 26 jetons Z). On tire simultanément deux jetons du sac. Calculer la probabilité que les deux jetons portent la même lettre.

Exercice 10.
On tire au hasard deux dominos distincts. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un double ? Quelle est la probabilité que les deux dominos aient une valeur en commun ?

Exercice 11.
On tire simultanément au hasard trois boules d'une urne qui contient 4 boules rouges, 5 blanches et 7 jaunes.
Déterminez la probabilité d'obtenir :

1. Un tirage monocolore.
2. Un tirage tricolore.
3. Un tirage bicolore.

4 Univers discret (infini dénombrable).

Exercice 12.

Exercice 13.
On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. On note pour $i \in \mathbb{N}^*$, A_i : « On obtient le premier face au i-ème lancer » et A_0 :« On n'obtient jamais face ».
Montrer que $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.

IV Probabilité conditionnelle.

1 Définition.

Définition 8

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini,

. $A \in \mathscr{P}$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$.

Pour tout $B \in \mathscr{E}$, nous appellerons *probabilité de B sachant A*, et nous noterons $\mathbb{P}(B|A)$ ou $\mathbb{P}_A(B)$, le réel :

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$$

Proposition 9

L'application $\mathbb{P}_A : \mathscr{E} \to [0;1]$ qui à tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$ associe $\mathbb{P}(A|B)$ est une probabilité sur Ω.

Exercice 14.

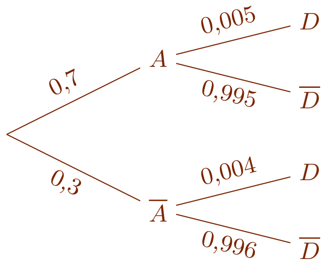
On lance une fois un dé parfait. On sait que le résultat est un nombre inférieur ou égal à 5. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre supérieur ou égal à 3 ?

Exercice 15.

Dans une usine, deux lignes de montage fabriquent des composants électroniques. La ligne A fabrique 70 % des composants. Le reste est fabriqué par la ligne B. La ligne A a un taux de composants défectueux en sortie de 0,5 %. Pour la ligne B, ce taux est de 0,4 %. On choisit au hasard un composant à la sortie de l'usine.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait été fabriqué par la ligne A et présente un défaut ?
2. Calculez la probabilité que ce composant présente un défaut.
3. En déduire, le composant présentant un défaut, la probabilité que ce composant ait été fabriqué sur la ligne A.

Correction de l'exercice 15



1. Calculons $\mathbb{P}(A \cap D)$.

   $\mathbb{P}(A) > 0$, donc d'après la formule des probabilités composées

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap D) &= \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(D)\\ &= 0{,}7 \times 0{,}005\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(C \cap R) = 0{,}0035.}$$

   Calculons $\mathbb{P}(D)$.

   $\{A; \overline{A}\}$ constituent un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(D \cap A) + \mathbb{P}(D \cap \overline{A})$$

   Comme $\mathbb{P}(\overline{A}) > 0$, d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= 0{,}0035 + \mathbb{P}(\overline{A}) \cdot \mathbb{P}_{\overline{A}}(D)\\ &= 0{,}0035 + 0{,}30 \times 0{,}004\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(D) = 0{,}0047.}$$

2. Calculons $\mathbb{P}_D(A)$.

   Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_A(D) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{0{,}0035}{0{,}0047}\\ &\approx 0{,}74468\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}_D(A) \approx 0{,}7447.$$

Exercice 16.

La cuisine A et la salle d'un restaurant B sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'extérieur. Une mouche initialement dans la cuisine souhaite y rester. Mais elle ne contrôle pas son trajet qui est aléatoire et régi par les règles suivantes : à chaque instant si elle est dans la pièce A, elle reste dans la pièce A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ et passe dans la pièce B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$; si elle est dans la pièce B, elle reste dans la pièce B avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, passe dans la pièce A avec une probabilité de $\frac{1}{4}$ et sort à l'air libre avec une probabilité de $\frac{1}{4}$. Si elle sort elle ne rentre plus.

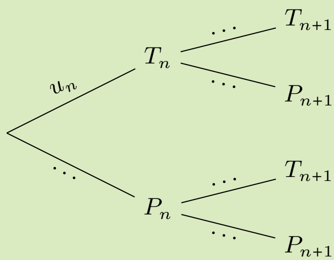
Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement « la mouche est dans la pièce A à l'instant n » et B_n l'événement « la mouche est dans la pièce B à l'instant n ». On considère a_n et b_n leur probabilités respectives.

1. Justifiez que, pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1})$ et $B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1})$.
   Déduisez-en que $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n$ et $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n$.
2. Montrez que pour tout entier naturel n, $b_{n+1} = 2a_{n+1}$.
3. Déduisez-en pour tout entier naturel non nul n, a_n en fonction de n. Calculez sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. Interprétez ce résultat.

Exercice 17.

Dans un zoo l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisir le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3. Si un manchot choisir le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère les événements T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage » et P : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage ».
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = \mathbb{P}(T_n)$.

1. (a) Donnez les valeurs de $\mathbb{P}(T_1)$, $\mathbb{P}(P_1)$, $\mathbb{P}_{T_1}(T_2)$ et $\mathbb{P}_{P_1}(T_2)$.
   (b) Montre que $\mathbb{P}(T_2) = \frac{1}{4}$.
   (c) Recopiez et complétez l'arbre ci-dessous.



   (d) Démontrez que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} = 0{,}1u_n + 0{,}2.$$

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.
   (a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{10}$. Précisez son premier terme.
   (b) Exprimez v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Calculez la limite de la suite (u_n).

2 Formule des probabilités composées.

Théorème 3 - Formule des probabilités composées.

Soient $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1,\dots,A_n) \in \mathscr{E}^n$.

Si

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$$

alors

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots A_{n-1})$$

Démonstration

Justifions l'existence des probabilités conditionnelles.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Quelque soit $k \in [\![1,n]\!]$, $A_1 \cap \cdots \cap A_n \subseteq A_1 \cap \cdots \cap A_k$.
Donc du fait de la croissance de la probabilité :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k)$$

Or

$$0 < \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n),$$

donc

$$\forall k \in [\![1,i]\!],\ \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_k) > 0$$

Les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(A_2|A_1),\dots,\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$ existent bien.

Montrons : $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$.

Remarquons un télescopage des termes

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\dots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\\
&= \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}(A_k|A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})\\
&= \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=1}^{n-1}\frac{\mathbb{P}(A_k \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1}}\\
&= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})\\
&= \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\text{quelque soit } i \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_i) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_i|A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1})$$

■

Remarques.

1. Nous retrouvons le résultat appelé principe multiplicatif (ou principe des bergers) utilisé pour calculer la probabilité d'un chemin sur un arbre probabiliste au lycée, $A_1 \cap \cdots \cap A_i$ désignant un chemin sur l'arbre probabiliste.

Exercice 18.

Une épreuve consiste à lancer indéfiniment une pièce équilibrée. Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement « on obtient au moins un pile pendant les n premiers lancers ».
Pour tout entier naturel k non nul, on note E_k l'événement « le premier Pile apparaît lors du k-ième lancer ».
Déterminez la probabilité E_k puis déduisez-en celle de A_n.

Correction de l'exercice 18

$E_k = F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k$.
$A_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$.

Exercice 19.

Une urne contient a boules blanches et b boules noires indiscernables. On tire successivement une boule jusqu'à obtenir une boule noire. Le jeu s'arrête alors.

1. on effectue les tirages avec remise. Quel est la probabilité que le jeu s'arrête à l'étape n avec $n \in \mathbb{N}^*$?
2. On effectue le tirage sans remise. Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête à l'étape n avec $n \in \mathbb{N}^*$?

3 Formule des probabilités totales.

Théorème 4 - Formule des probabilité totales

Soient $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{A_1, \ldots, A_n\}$ un système complet d'événements de Ω de probabilités strictement positives. Pour tout $B \in \mathscr{E}$

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B|A_k)$$

Démonstration

Soit $B \in \mathscr{E}$.

$$\begin{aligned} B &= B \cap \Omega \\ &= B \cap \left(\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \right) \\ &= \bigsqcup_{k=1}^{n} B \cap A_k \end{aligned}$$

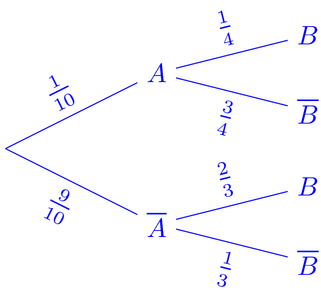
D'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{n} B \cap A_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B \cap A_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B) \end{aligned}$$

■

Exemples.

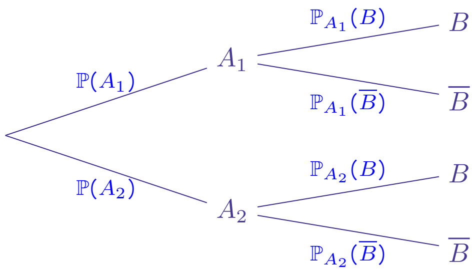
1. Situation de type bac :



2.

Remarques.

1. Ce résultat qui est vu en classe terminale est en général utilisé dans le cas d'arbres probabilistes. Il s'agit le plus souvent de retrouver la probabilité d'un événement qui apparaît dans plusieurs chemins :



$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}_{A_2}(B).$$

2. Il n'est pas indispensable d'avoir un système complet d'événements. Il suffit d'événements disjoints deux à deux dont la réunion contient B. Autrement dit plutôt que : $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$, il suffit de $\bigsqcup_{k=1}^{n} A_k \supset B$. En effet dans ce cas : $B = B \cup \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$.

Exercice 20.

On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

Exercice 21.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.
Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire au deuxième tirage.

Exercice 22.

Une personne appelle au hasard un service téléphonique et tombe sur la ligne occupée. On considère que si la ligne est occupée à un instant, elle reste occupée à l'instant d'après avec une probabilité de $\frac{2}{3}$ et que si elle est libre à un instant, elle redevient occupée à l'instant d'après avec une probabilité de $\frac{5}{6}$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n l'événement « la ligne est occupée à l'instant n » et a_n sa probabilité.
Déterminez a_{n+1} en fonction de a_n, puis déduisez-en a_n en fonction de n entier naturel.

4 Formule de Bayes.

Théorème 5 - Formule Bayes

Soient :

. $(\Omega,\mathscr{E},\mathbb{P})$ un espace probabilisé,

. $B \in \mathscr{E}$ un événement tel que : $\mathbb{P}(B) > 0$,

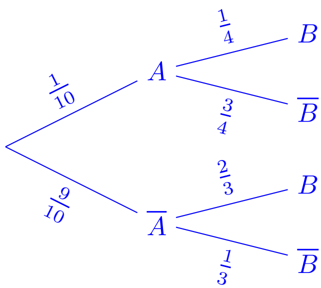
. $n \in \mathbb{N}^*$

Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles alors

$$\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)}.$$

Exemples.

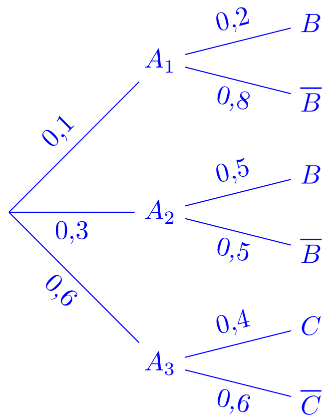
1. Considérons la situation typique du baccalauréat :



$\{A,\overline{A}\}$ est un système complet d'événements, $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) \neq 0$ donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}|A)} \\ &= \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{9}{10} \times \frac{2}{3}} \\ &= \frac{1}{25}\end{aligned}$$

2. Un peu plus rare au bac :



$\{A_1,A_2,A_3\}$ est un système complet d'événements, $\mathbb{P}(A_1) \neq 0$, $\mathbb{P}(A_2) \neq 0$ et $\mathbb{P}(A_3) \neq 0$ donc, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \frac{\mathbb{P}(B|A_2)\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(B|A_3)} \\ &= \frac{0,3 \times 0,5}{0,1 \times 0,2 + 0,3 \times 0,5 + 0,6 \times 0} \\ &= \frac{15}{16}\end{aligned}$$

3. Faux positif (encore le bac).
   Un test de dépistage de maladie fonctionne dans 95 % des cas sur une personne effectivement malade et dans 98 % des cas il confirme bien l'absence de maladie pour une personne saine.
   Quelle est la probabilité qu'une personne soit effectivement malade sachant que le test est positif sachant que la maladie touche 1 % de la population ?
   Modélisons : notons M : « la personne est malade » et P : « le test est positif ».
   Nous devons calculer $mathbbP(M|P)$.
   $\{M,\overline{M}\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles : $\mathbb{P}(M) = 0,01$ et $\mathbb{P}\left(\overline{M}\right) = 0,99$.
   On en déduit, d'après la formule de Bayes :

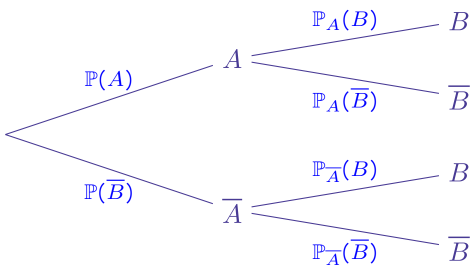
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(M|P) &= \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(P|M)}{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(P|M)+\mathbb{P}(\overline{M})\mathbb{P}(P|\overline{M})}\\ &= \frac{0{,}01\times 0{,}95}{0{,}01\times 0{,}95+0{,}99\times(1-0{,}98)}\\ &= \frac{0{,}95}{1{,}93}\end{aligned}$$

Remarques.

1. Pour $n = 1$ on retrouve la définition de la probabilité conditionnelle. Quelque soit $A \in \mathscr{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

   L'idée serait d'intervertir les deux niveaux de l'arbre suivant :



   Nous dirons que $\mathbb{P}(A)$ est une *probabilité a priori* (en l'état initial des connaissances, de la situation) et que $\mathbb{P}_B(A)$ est *la probabilité a posteriori* (en ajoutant une nouvelle information qui est la réalisation de B).

2. Inférence bayésienne.

Exercice 23.

Une information circule parmi les étudiants. Chaque étudiant la transmet fidèlement avec une probabilité $p \in]0;1[$ et la déforme en son contraire avec une probabilité $q = 1-p$. Le premier étudiant détient la bonne information.

1. Quelle est la probabilité que le deuxième étudiant détienne la bonne information ?
2. Quelle est la probabilité que le troisième étudiant détienne la bonne information ?
3. Quelle est la probabilité que le deuxième étudiant détienne la bonne information sachant que le troisième étudiant est bien informé ?

Correction de l'exercice 23

1. $\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1) = p$.
2. $\mathbb{P}(B_3) = \mathbb{P}(B_3 \cap B_2) + \mathbb{P}(B_3 \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(B_2) \times \mathbb{P}(B_3|B_2) + \mathbb{P}(\overline{B_2}) \times \mathbb{P}(B_3|\overline{B_2}) = p \times p + q \times q$.
3. $\mathbb{P}(B_2|B_3) = \frac{\mathbb{P}(B_2)\times\mathbb{P}(B_3|B_2)}{\mathbb{P}(B_2)\times\mathbb{P}(B_3|B_2)+\mathbb{P}(\overline{B_2})\times\mathbb{P}(B_3|\overline{B_2})} = \frac{p\times p}{p^2+q^2}$

V Exercice.

Exercice 24.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.
On suppose que le second tirage a donné une boule blanche, quelle est la probabilité que le premier tirage ait donné une boule blanche ?

Exercice 25.

On effectue 3 tirages successifs sans remise dans une urne contenant 3 boules blanches et 7 boules noires.
Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules blanches ?

Exercice 26.

On fait l'hypothèse que la probabilité de mettre au monde une fille est de $\frac{1}{2}$.
M. X et Mme Y ont deux enfants. Quelle est la probabilité qu'ils aient deux filles ?
On arrive chez eux. Un enfant ouvre la porte. C'est une fille. Quelle est la probabilité pour que l'autre enfant soit une fille ?
Et si en plus, elle nous dit qu'elle est l'aînée, quelle est la probabilité que la seconde soit une fille ?

Exercice 27.

Une urne contient 9 boules, numérotées de 1 à 9.
On tire deux boules.
Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules portant des numéros de même parité dans les cas suivants :

1. On tire deux boules simultanément.
2. On tire une boule, on ne la remet pas et on tire une deuxième boule.
3. On tire une boule, on la remet et on tire une deuxième boule.

Exercice 28.

Exercice 29.

$\frac{1}{4}$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades.
Parmi les malades, il y a 4 non vaccinés pour un vacciné.
Quelle est la probabilité pour un non-vacciné de tomber malade ?

Exercice 30.

On range au hasard 7 dossiers numérotés de 1 à 7 dans 5 tiroirs a, b, c, d, e.
Quelle est la probabilité des évènements suivants ?

1. Les 7 dossiers sont dans un même tiroir.
2. Les 7 dossiers sont dans 2 tiroirs exactement.
3. Les 7 dossiers sont dans 3 tiroirs exactement.
4. Les 7 dossiers sont dans 4 tiroirs exactement.
5. Aucun des tiroirs n'est vide.

Exercice 31.

Un jeu de cartes est constitué de 20 cartes dont 17 portent le numéro 0 et 3 le numéro 1.
Un joueur tire au hasard simultanément 4 cartes de ce jeu ; il gagne s'il obtient au moins deux 1.
Quelle est la probabilité qu'il gagne ?

Exercice 32.

Soient A et B deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{3}{4}$.
Trouver les valeurs maximales et minimales de $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 33.

On jette trois fois un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b et c les numéros obtenus. Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer la probabilité pour que l'équation du second degré ait :

1. deux racines réelles distinctes,
2. une racine réelle double,
3. pas de racines réelles.

Exercice 34.

Exercice 35.

On lance une pièce une infinité de fois. On note pour $n \geqslant 3$, B_n l'événement « on obtient face au $(n-2)$-ème lancer, pile au $(n-1)$-ème lancer et pile au n-ème lancer ».
Pour $n \geqslant 3$, les événements B_n et B_{n+2} sont-ils incompatibles ?

Exercice 36.

On dispose d'une urne avec 3 boules : une bleue, une verte et une rouge. On tire une boule dans l'urne :

- Si elle est verte, on perd 5 euros.
- Si elle est bleue, on joue à pile ou face : on gagne 10 euros si on fait face, et on perd 10 euros si on fait pile.
- Si elle est rouge, on gagne 3 euros.

On note V : « on obtient la boule verte », B : « On obtient la boule bleue » , R : « On obtient la boule rouge », F : « On fait face au jeu pile ou face », et G : « On gagne de l'argent ».
Justifiez que $G = (B \cup F) \cup R$.

Exercice 37.

Soit $n \geqslant 2$. On dispose de n dés. Pour $k \in [\![1,n[\![$, le k-ème dé est un dé à k faces numérotées de 1 à k.
On lance tous les dés l'un après l'autre. Un lancer est considéré comme gagnant si le dé tombe sur 1.
Quelle est la probabilité de gagner au moins deux lancers de dés ?

Exercice 38.

Exercice 39.

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines.
Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien.
Pour un certain type de machines, le technicien constate :

- qu'il doit intervenir la première semaine,
- que s'il est intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\frac{3}{4}$,
- que s'il n'est pas intervenu la n-ième semaine, la probabilité qu'il intervienne la $(n+1)$-ième semaine est égale à $\frac{1}{10}$.

On désigne par E_n l'évènement : « le technicien intervient la n-ième semaine » et par p_n la probabilité de cet évènement E_n.

1. Déterminez les nombres : $p(E_1)$, $p(E_{n+1}|E_n)$ et $p(E_{n+1}|\overline{E_n})$, puis en fonction de p_n : $p(E_{n+1} \cap E_n)$ et $p(E_{n+1}|\overline{E_n})$.
2. Déduisez-en que pour tout entier n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{13}{20}p_n + \frac{1}{10}.$$

3. On pose $q_n = p_n - \frac{2}{7}$.
   Montrez que la suite (q_n) est une suite géométrique. Déduisez-en l'expression de p_n en fonction de n.
   Pour quelles valeurs de l'entier n, la probabilité que le technicien intervienne la n-ième semaine est-elle inférieure à $\frac{3}{10}$.

Exercice 40.

Dans une région touristique, une société propose un service de location de vélos pour la journée.

La société dispose de deux points de location distinctes, le point A et le point B. Les vélos peuvent être empruntés et restitués indifféremment dans l'un où l'autre des deux points de location.

On admettra que le nombre total de vélos est constant et que tous les matins, à l'ouverture du service, chaque vélo se trouve au point A ou au point B.

D'après une étude statistique :

- Si un vélo se trouve au point A un matin, la probabilité qu'il se trouve au point A le matin suivant est égale à 0,84 ;
- Si un vélo se trouve au point B un matin la probabilité qu'il se trouve au point B le matin suivant est égale à 0,76.

À l'ouverture du service le premier matin, la société a disposé la moitié de ses vélos au point A, l'autre moitié au point B.

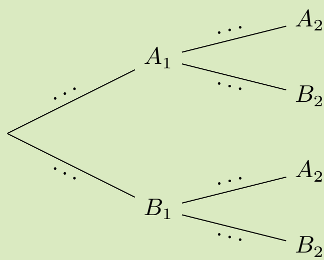
On considère un vélo de la société pris au hasard.

Pour tout entier naturel non nul n, on définit les évènements suivants :

- A_n : « le vélo se trouve au point A le n-ième matin »
- B_n : « le vélo se trouve au point B le n-ième matin ».

Pour tout entier naturel non nul n, on note a_n la probabilité de l'évènement A_n et b_n la probabilité de l'évènement B_n. Ainsi $a_1 = 0{,}5$ et $b_1 = 0{,}5$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premiers matins :

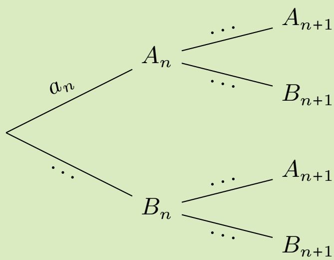


2. (a) Calculer a_2.

   (b) Le vélo se trouve au point A le deuxième matin. Calculer la probabilité qu'il se soit trouvé au point B le premier matin. La probabilité sera arrondie au millième.

Exercice 40. - suite.

3. (a) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $n+1$-ième matins.



   (b) Justifier que pour tout entier naturel non nul n, $a_{n+1} = 0{,}6a_n + 0{,}24$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $a_n = 0{,}6 - 0{,}1 \times 0{,}6^{n-1}$.

5. Déterminer la limite de la suite (a_n) et interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ et interpréter le résultat obtenu dans le contexte de l'exercice.

Exercice 41.

Une urne contient n boules noires et b boules blanches et on tire 2 boules successivement sans remise. Quelle est la probabilité que la deuxième boule tirée soit blanche ?

Correction de l'exercice 41

$\{B_1, N_1\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}(B_2|N_1) + \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2|B_1)\\ &= \frac{n}{n+b} \times \frac{b}{n+b-1} + \frac{b}{n+b} \times \frac{b-1}{n+b-1}\\ &= \frac{nb + b(b-1)}{(n+b)(n+b-1)}\end{aligned}$$

Exercice 42.

Dans une usine, trois machines A, B et C produisent respectivement 50 %, 30 % et 20 % des pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses sont 3 % pour A, 4 % pour B et 5 % pour C. Une pièce choisie au hasard se trouve défectueuse. Avec quelle probabilité a-t-elle été fabriquée par la machine A ?

Correction de l'exercice 42

$\{A,B,C\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule des probabilités totales.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(D|A)+\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(D|B)+\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(D|C)\\ &= \frac{50}{100}\times\frac{3}{100}+\frac{30}{100}\times\frac{4}{100}+\frac{20}{100}\times\frac{5}{100}\\ &= \frac{1{,}5+1{,}2+1}{100}\\ &= \frac{3{,}7}{100}\end{aligned}$$

Exercice 43.

[2] Dans une population donnée, deux maladies M_1 et M_2 sont observables chez respectivement 10 % et 20 % des individus. On suppose que le nombre des malchanceux qui souffrent à la fois de M_1 et M_2 est négligeable (nul), pour simplifier. On entreprend un dépistage systématique de ces maladies au moyen d'un test unique. Ce test est positif pour 90 % des malades de M_1, 70 % des malades de M_2 et 10 % des individus sains.

1. Pour un individu choisi au hasard, avec quelle probabilité le test est-il positif ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pour lequel le test est positif soit atteint de la maladie M_1 ? Même question avec M_2 ?

Correction de l'exercice 43

1. $\{M_1,M_2,P\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule de probabilités totales :

$$\mathbb{P}(P)=\mathbb{P}(M_1)\times\mathbb{P}(P|M_1)+\mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(P|M_2)+\mathbb{P}(S)\times\mathbb{P}(P|S)$$

2. $\{M_1,M_2,P\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles donc, d'après la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(M_1)=\frac{\mathbb{P}(M_1)\times\mathbb{P}(P|M_1)}{\mathbb{P}(M_1)\times\mathbb{P}(P|M_1)+\mathbb{P}(M_2)\times\mathbb{P}(P|M_2)+\mathbb{P}(S)\times\mathbb{P}(P|S)}$$

Exercice 44.

On dispose de 4 dés à 6 faces, dont un pipé, qui tombe sur 1 avec une probabilité de $\frac{5}{6}$ et donne une même probabilité aux autres faces. On choisit au hasard un dé parmi les 4, on le lance $2n$ fois et on obtient n fois l'entier 1. Avec quelle probabilité le dé choisi est-il pipé ?

Exercice 45.

Soit $n \geqslant 3$ un entier. Une urne contient n pièces. Il se trouve que $n-1$ d'entre elles sont normales et équilibrées : lorsque l'on les lance on fait pile avec probabilité $1/2$ et face aussi. La dernière pièce est truquée, elle est face des deux côtés. On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. 1. Quelle est la probabilité qu'on obtienne face pendant les n premiers lancers ? 2. Sachant que l'on a obtenu face lors des n premiers lancers, quelle est la probabilité d'avoir pris la pièce truquée ? Quelle est la limite de probabilité quand n tend vers l'infini ?

Exercice 46.

Exercice 47.

Exercice 48.