Dérivées.

I Dérivabilité et nombre dérivé.

Définition 1

Soient :

. $a < b$ des réels,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une application.

f est dite *dérivable à droite en a* si et seulement si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures.

Dans ce cas, cette limite est appelée *le nombre dérivé de f à droite en a*, et on note :

$$f'_d(a) := \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Définition 2

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $a \in E$ tel que f soit définie dans un voisinage ouvert de a.

f est *dérivable en a* si et seulement si

(i) f est dérivable à droite en a,

(ii) f est dérivable à gauche en a,

(iii) $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Si f est dérivable en a alors on appelle *nombre dérivé de f en a* le nombre noté

$$f'(a) := f'_d(a) = f'_g(a).$$

Proposition 1

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $a \in E$ tel que f soit définie au voisinage de a.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

II Tangente.

Définition 3

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $a \in E$ tel que f soit définie et dérivable dans un voisinage ouvert de a.

On appelle *tangente au graphe de f au point $(a,f(a))$* la droite d'équation cartésienne

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

III Fonction dérivée.

1 Définition.

Définition 4

Soit :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

Nous dirons que f est *dérivable sur E* si et seulement si, pour tout $a \in E$, f est dérivable en a.

Dans ce cas on appelle fonction dérivée de f la fonction :

$$f' := \left\{ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

Proposition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $f_n : x \mapsto x^n$ l'application définie sur $\mathbb{R}$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus

(i) $f_0' = 0$.

(ii) et si $n > 0$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ l'application définie sur $\mathbb{R}^*$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{n}{x^{n+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Proposition 4

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

Proposition 5

La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

Proposition 6

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

2 Calculer une fonction dérivée.

Proposition 7 - Linéarité de la dérivation.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E alors $\lambda f + g$ est dérivable sur E et

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

Proposition 8 - Dérivation d'un produit.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E alors fg est dérivable sur E et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Proposition 9 - Dérivation de l'inverse.

Soient :

. g une fonction définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si g est dérivable sur E et que g ne s'annule pas sur E alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur E et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

Corollaire 1 - Dérivation d'un quotient.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E et que g ne s'annule pas sur E alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur E et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition 10

La fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

3 Fonctions composées.

Proposition 11

Soient :

. $E \subset \mathbb{R}$,

. $F \subset \mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application,

. $g : F \to \mathbb{R}$ une application,

. $a \in E$.

Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = \left(g' \circ f(a)\right) \times f'(a).$$

Proposition 12

La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

4 Fonction réciproque.

Proposition 13

Soient :

. $E \subset \mathbb{R}$,

. $f : E \to \mathbb{R}$ une application,

. $a \in E$.

Si

- f est strictement monotone,
- f est continue,
- f est dérivable en a,
- et $f'(a) \neq 0$

alors $f^{-1} : f(E) \to E$ est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Proposition 14

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 15

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

IV Développement limité.

1 Négligeable.

Définition 5

Soient :

. $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. f et g des applications définies sur un voisinage de a.

f est dite *négligeable devant* g *au voisinage de* a si et seulement si il existe une fonction ε définie sur un voisinage de a telle que :

(i) $f = g\varepsilon$ au voisinage de a,

(ii) et $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas on note $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Proposition 16

Soient :

. $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. f et g des applications définies sur un voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 17

2 Développement limité d'ordre 1.

Théorème 1

f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel α tel que, dans un voisinage V de a :

$$\forall x \in V,\ f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \underset{x \to a}{o}(x-a).$$

Et dans ce cas $\alpha = f'(a)$.

V Dérivation et extremum.

VI Égalité des accroissements finis.

1 Théorème de Rolle.

2 Égalité des accroissements finis.

3 Inégalité des accroissements finis.

VII Étude des variations.

VIII Dérivées successives.

IX Exercices.