Dérivées.

I Dérivabilité et nombre dérivé.

Exercice 1.

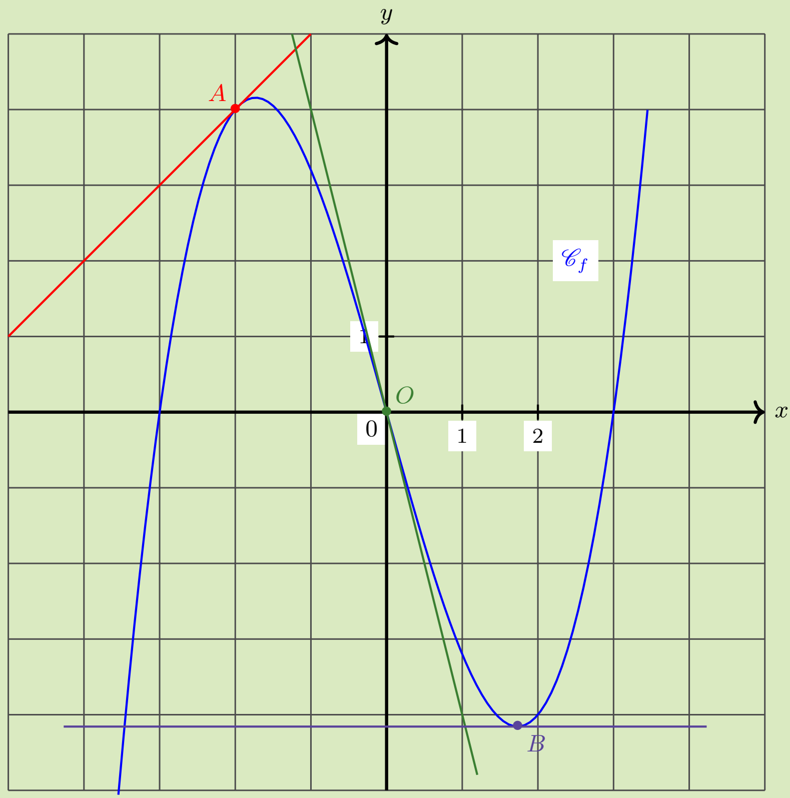
Soit f l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, et $f(0) = 1$.

1. Démontrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudiez la dérivabilité de f en 0.

II Tangente.

Exercice 2.

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes à cette courbe aux points $A(-2;4)$, $O(0{,}0)$ et $B(\sqrt{3};0{,}4\sqrt{3}^3-3{,}6\sqrt{3})$.



1. Déterminez les nombres dérivés de f en -2, en 0 et en $\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en, les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A, O et B.

Exercice 3.

Soit f une fonction dérivable en 3 et telle que $f(3)=4$ et $f'(3)=\frac{1}{3}$.
Tracez la tangente au graphe de f en 3 puis proposez une allure possible du graphe de f au voisinage de 3.

III Fonction dérivée.

1 Définition.

2 Calculer une fonction dérivée.

Exercice 4.
Étudier la dérivabilité de la fonction cotangente.

3 Fonctions composées.

4 Fonction réciproque.

Exercice 5.
Déterminez pour tout réel x non nul la valeur de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 6.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}\mathrm{e}^x$.

1. Justifiez que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à préciser.
2. On note g la bijection réciproque. Montrez que g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
3. Étudiez la dérivabilité de g en 0.

Exercice 7.
Montrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Donnez les propriétés de f^{-1} sur J.

1. $f(x) = x^3 - 8x + 1$ et $I = [-1;1]$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ et $I = [1;+\infty[$.

Exercice 8.

1. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \tan^3(x)$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est une bijection de I dans un intervalle J à déterminer.
2. Étudiez la dérivabilité de f^{-1} sur J.
3. Déterminez $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

IV Développement limité.

1 Négligeable.

2 Développement limité d'ordre 1.

V Dérivation et extremum.

VI Égalité des accroissements finis.

1 Théorème de Rolle.

2 Égalité des accroissements finis.

3 Inégalité des accroissements finis.

VII Étude des variations.

VIII Dérivées successives.

IX Exercices.

Exercice 9.

Étudiez la dérivabilité et donnez la dérivée des fonctions dont l'expression algébrique et

a) x^x,

b) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,

c) $\ln|\ln(x)|$,

d) $\arctan(\ln(x))$.

Exercice 10.

Étudiez la dérivabilité de f en 0 dans les cas suivants.

a) $f(x)=\frac{x}{1+|x|}$,

b) $f(x)=x^2\ln(x)$ et $f(0)=0$.

c) $f(x)=\begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x>0 \\ \mathrm{e}^x-1 \text{ si } x\leqslant 0\end{cases}$

Exercice 11.

Donnez l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$.

b) $f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x}$.

c) $f(x)=x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

d) $f(x)=\sin(2x^2-x+1)$.

Exercice 12.

Dites si la fonction f est prolongeable par continuité et le cas échéant si son prolongement est dérivable en 0.

a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \end{array} \right.$.

b) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{array} \right.$.

c) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{array} \right.$.

Exercice 13.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrez que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, le polynôme P_λ a une unique racine réelle notée $u(\lambda)$.
2. Montrez que l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & u(\lambda) \end{array} \right.$ est monotone et continue.
3. Tracez le graphe de u.