

Dérivées.

I Dérivabilité et nombre dérivé.

Exercice 1.

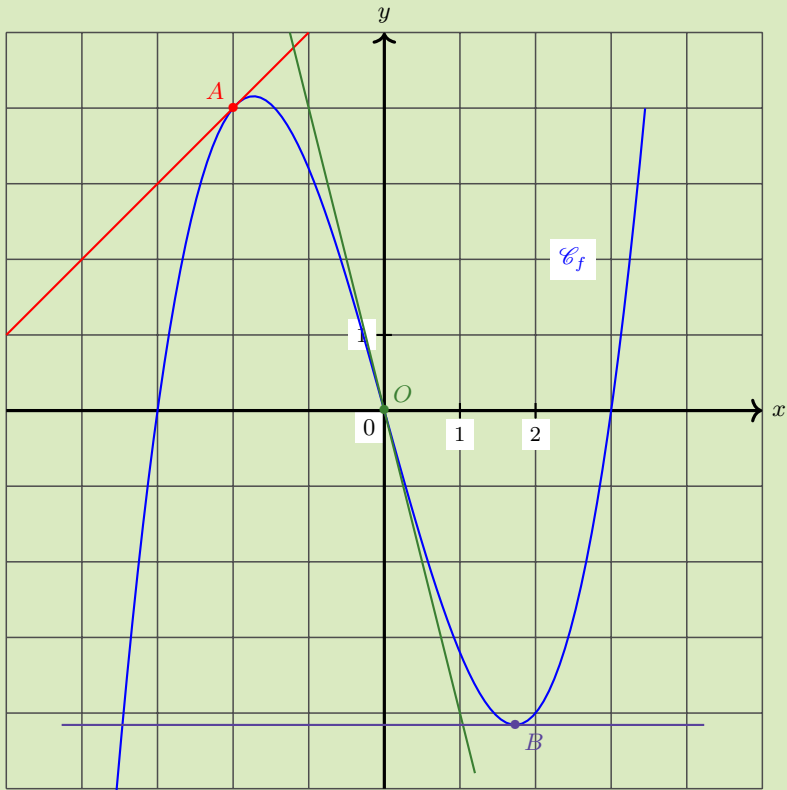
Soit f l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, et $f(0) = 1$.

1. Démontrez que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .
2. Étudiez la dérivabilité de f en 0.

II Tangente.

Exercice 2. 🐛

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes à cette courbe aux points $A(-2; 4)$, $O(0,0)$ et $B(\sqrt{3}; 0, 4\sqrt{3} - 3, 6\sqrt{3})$.



- Déterminez les nombres dérivés de f en -2 , en 0 et en $\sqrt{3}$.
- Déduisez-en, les équations réduites des tangentes à \mathcal{C}_f en A , O et B .

Exercice 3. 🐛

Soit f une fonction dérivable en 3 et telle que $f(3) = 4$ et $f'(3) = \frac{1}{3}$.

Tracez la tangente au graphe de f en 3 puis proposez une allure possible du graphe de f au voisinage de 3 .

III Fonction dérivée.

1 Définition.**2 Calculer une fonction dérivée.**

Exercice 4.

Étudier la dérivabilité de la fonction cotangente.

3 Fonctions composées.**4 Fonction réciproque.**

Exercice 5.

Déterminez pour tout réel x non nul la valeur de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 5

$$\varepsilon(x) \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 6.

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = \sqrt{x}e^x$.

1. Justifiez que f induit une bijection de \mathbb{R}_+ sur un intervalle J à préciser.
2. On note g la bijection réciproque. Montrez que g est dérivable sur $]0; +\infty[$.
3. Étudiez la dérivabilité de g en 0.

Exercice 7.

Montrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Donnez les propriétés de f^{-1} sur J .

1. $f(x) = x^3 - 8x + 1$ et $I = [-1; 1]$.
2. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ et $I = [1; +\infty[$.

Exercice 8.

1. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \tan^3(x)$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est une bijection de I dans un intervalle J à déterminer.
2. Étudiez la dérivabilité de f^{-1} sur J .
3. Déterminez $(f^{-1})'(1)$.

IV Développement limité.

- 1 Négligeable.
- 2 Développement limité d'ordre 1.

V Dérivation et extremum.**VI Égalité des accroissements finis.**

- 1 Théorème de Rolle.
- 2 Égalité des accroissements finis.
- 3 Inégalité des accroissements finis.

VII Étude des variations.**VIII Dérivées successives.****IX Exercices.**

Exercice 9.

Étudiez la dérivabilité et donnez la dérivée des fonctions dont l'expression algébrique et

- | | |
|---------------------|--------------------------------|
| a) x^x , | b) $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, |
| c) $\ln \ln(x) $, | d) $\arctan(\ln(x))$. |

Exercice 10.

Étudiez la dérivabilité de f en 0 dans les cas suivants.

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = \frac{x}{1+ x }$, | b) $f(x) = x^2 \ln(x)$ et $f(0) = 0$. |
| c) $f(x) = \begin{cases} x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ e^x - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ | |

Exercice 11.

Donnez l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction f dans les cas suivants.

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$. | b) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$. |
| c) $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$. | d) $f(x) = \sin(2x^2 - x + 1)$. |

Exercice 12.

Dites si la fonction f est prolongeable par continuité et le cas échéant si son prolongement est dérivable en 0.

$$\text{a) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \end{cases} .$$

$$\text{b) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \end{cases} .$$

$$\text{c) } f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{cases} .$$

Exercice 13.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrez que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, le polynôme P_λ a une unique racine réelle notée $u(\lambda)$.
2. Montrez que l'application $u : \begin{cases} [0, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto u(\lambda) \end{cases}$ est monotone et continue.
3. Tracez le graphe de u .