Dérivées.

L'expression « au voisinage de »

I Dérivabilité et nombre dérivé.

Définition 1

Soient :

. $a < b$ des réels,

. $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une application.

f est dite *dérivable à droite en a* si et seulement si $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a par valeurs supérieures.

Dans ce cas, cette limite est appelée *le nombre dérivé de f à droite en a*, et on note :

$$f'_d(a) := \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Remarques.

1. La quantité $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelé *taux d'accroissement de f en a.*
2. Si le taux d'accroissement n'admet pas de limite on dit que f n'est pas dérivable à droite en a.
3. Il arrive que le taux d'accroissement soit présenté différemment. En procédant au changement de variable $x - a = h$, le taux d'accroissement s'écrit :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

4. Évidemment des notions semblables existent « à gauche ».
5. Par construction du nombre dérivé nous aurons très souvent es forme indéterminée et il faudra lever l'indétermination par des manipulations algébriques.

Exemples.

1. Nombre dérivé à droite en 1 des fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Soit $x \in]1, +\infty[$.

$$\frac{x^n - 1^n}{x-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

Donc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{x^n - 1}{x-1} = n$.
Donc

$x \mapsto x^n$ est dérivable à droite en 1 et son nombre dérivé est n.

2. Nombre dérivé à droite en 2 de la fonction constante égale à 7.

3. Dérivée à droite en 1 de la fonction $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

4. Nombre dérivé à droite et à gauche de valeur absolue en 0.
   Suivant la valeur de x il y a deux expressions algébriques de la fonction valeur absolue donc nous allons procéder par disjonction des cas.

   * Premier cas : dérivabilité à droite.

     Soit $x \in]0, +\infty[$.

     $$\begin{aligned} \frac{|x| - |0|}{x - 0} &= \frac{x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

     Donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1$.

     Valeur absolue est dérivable à droite en 0 et le nombre dérivé de la fonction valeur absolue à droite en 0 est 1.

   * Second cas : Dérivabilité à gauche.

     Soit $x \in]-\infty, 0[$.

     $$\begin{aligned} \frac{|x| - |0|}{x - 0} &= \frac{-x}{x} \\ &= -1 \end{aligned}$$

     Donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$.

     Valeur absolue est dérivable à gauche en 0 et le nombre dérivé de la fonction valeur absolue à gauche en 0 est -1.

5. Dérivabilité à droite en 0 de racine carrée.

   Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

   Or $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc

   $$\boxed{\text{la fonction racine carrée n'est pas dérivable à droite en 0.}}$$

6. Soit f l'application définie par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$.

   * Étudions la dérivabilité de f à droite en 0.

     Soit $x \in]0, +\infty[$.

$$\tau_f(0,x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 0}{x-0} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

     $$\boxed{f \text{ n'est pas dérivable à droite en 0.}}$$

   * Étudions la dérivabilité de f à gauche en 0.

     Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$\tau_f(0,x) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} 0.$$

     $$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche en 0 et } f'_g(0) = 0.}$$

Exercice 1.

Soit f l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, et $f(0) = 1$.

1. Démontrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Étudiez la dérivabilité de f en 0.

Définition 2

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $a \in E$ tel que f soit définie dans un voisinage ouvert de a.

f est *dérivable en a* si et seulement si

(i) f est dérivable à droite en a,

(ii) f est dérivable à gauche en a,

(iii) $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Si f est dérivable en a alors on appelle *nombre dérivé de f en a* le nombre noté

$$f'(a) := f'_d(a) = f'_g(a).$$

Exemples.

1. La fonction carrée est dérivable en 0.
   Notons $f : x \mapsto x^2$.
   Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = x$$

   donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{x^2-0^2}{x-0} = 0$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{x^2-0^2}{x-0} = 0$.
   Ainsi la fonction carré est dérivable à droite et à gauche en 0 et comme de plus $f'_d(0) = f'_g(0) = 0$ nous pouvons dire qu'elle est dérivable en zéro et $f'(0) = 0$.
2. Valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
   En notant g la fonction valeur absolue nous avons vu que $g'_d(0) = 1$ et $g'_g(0) = -1$.
   Puisque $g'_d(0) \neq g'_g(0)$, g n'est pas dérivable en 0.
   Cela se remarque graphiquement par un pointu sur la courbe représentative de la fonction valeur absolue en 0.
3. Racine cubique n'est pas dérivable en zéro.
   Comme la fonction racine carrée elle n'est pas dérivable à droite car

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x>0}]{} +\infty.$$

Mais elle n'est pas non plus dérivable à gauche car

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0}=\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2}\underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow}-\infty.$$

Remarques.

1.

Proposition 1

Soient :

. f une application définie sur $E\subset\mathbb{R}$,

. $a\in E$ tel que f soit définie sur un voisinage ouvert de a.

Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration

Démontrons $f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}f(a)$.

La fonction $\tau_f(a,x)$ est prolongeable par continuité en a puisque f est dérivable en a. Donc, pour tout x dans un voisinage de a,

$$f(x)=f(a)+\tau_f(a,x)(x-a)$$

Or $\tau_f(a,x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}f'(a)$ donc

$$f(x)=f(a)+\tau_f(a,x)(x-a)\underset{x\to a}{\longrightarrow}f(a).$$

Ainsi

$$\boxed{f \text{ est continue en } a.}$$

■

Exemples.

1. Les fonctions constantes sont dérivables donc continues.
2. La fonction valeur absolue est continue et pourtant elle n'est pas dérivable.
3. La fonction racine carrée est continue à droite en 0 mais n'est pas dérivable à droite en 0.

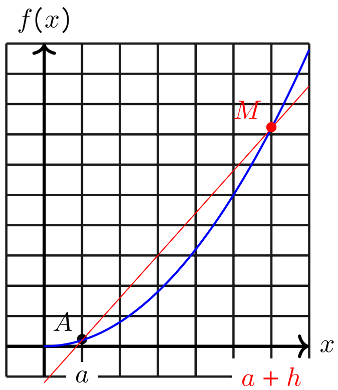
Remarques.

1. La réciproque de la proposition (« toute fonction continue est dérivable ») est fausse.
2. Cette implication pourrait être scindée en deux : si f est dérivable à droite en a alors f est continue à droite en a puis le cas à gauche.
3. Nous pourrons utiliser la contraposée de cette proposition pour justifier de la non dérivabilité : f n'est pas continue à droite en a donc f n'est pas dérivable à droite en a.

II Tangente.

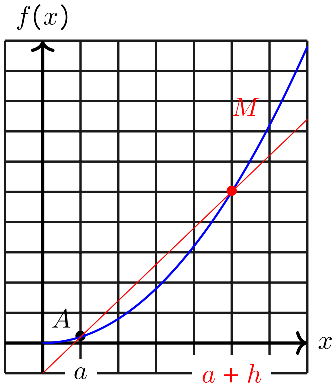
Comme bien souvent en mathématique c'est un point de vue géométrique qui est privilégié pour se représenter les objets. C'est aussi celui qui se généralise le plus simplement

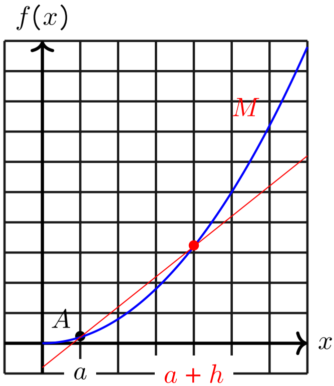
Rappelons que le taux d'accroissement correspond au coefficient directeur d'une certaine droite. Graphiquement, le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et $a + h$ est le coefficient de la droite dessinée en rouge.

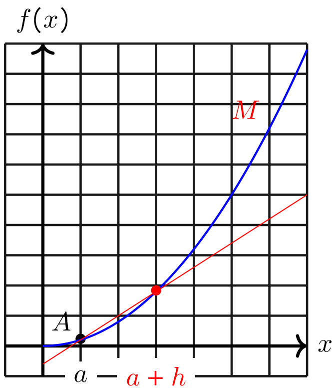


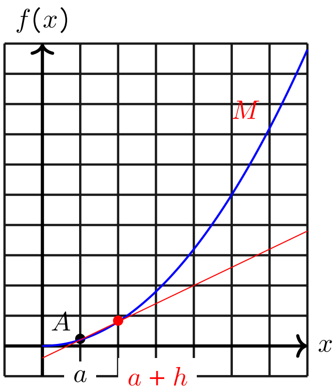
Si nous remplaçons h par 0, alors le deux points sont confondus et parler d'une droite n'a plus aucune sens. Nous retrouvons le problème rencontré avec le taux d'accroissement : nous ne pouvons pas remplacer h par 0.

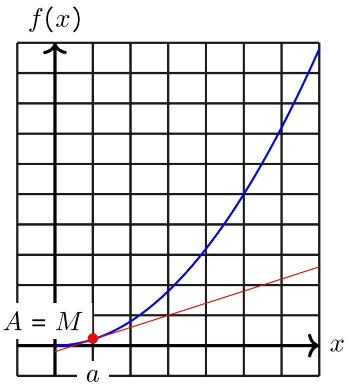
De la même façon nous allons rendre h de plus en plus petit. Graphiquement cela revient à dire que nous rapprochons le point M de A.











Nous obtenons une droite qui semble posée sur la courbe représentative de la fonction. Cette droite sera appelée une *tangente* de la courbe.

Son coefficient directeur est le taux d'accroissement limite obtenu lorsque h se rapproche de 0. Autrement dit le coefficient directeur de la tangente est le nombre dérivé.

La courbe et la tangente semblent se confondre au voisinage du point A. Ceci correspond à un outil classique en mathématique, le développement limité. Ici, la fonction f, pour des valeurs de x pas trop loin de a, est semblable à une fonction affine : "$f(x) \approx ax+b$". Cette approximation est extrêmement riche en applications sera revue dans le paragraphe suivant

Sécantes et tangente : illustration avec geogebra (télécharger le fichier : lien).

Définition 3

Soient :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $a \in E$ tel que f soit définie et dérivable dans un voisinage ouvert de a.

On appelle *tangente au graphe de f au point $(a,f(a))$* la droite d'équation cartésienne

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Remarques.

1. Nous utiliserons souvent les tangentes pour aider à tracer la courbe représentative de la fonction. En effet, localement, la courbe et sa tangente peuvent être « confondues ».
2. Lorsque la fonction est dérivable uniquement à droite (ou à gauche) de a on définie une *demi-tangente* à la courbe. confer exemple infra.
3. Lorsque la limite à droite en a du taux d'accroissement est infini nous dirons que la fonction admet *une demi-tangente verticale en a*.
4. On parle parfois de la tangente au graphe en a sans préciser le point.

Exemples.

1. Déterminons la tangente au graphe de $f : x \mapsto x^2 - 2x + 3$ en -1.

   Trichons et admettons que f est dérivable en -1 et que sont nombre dérivé est $f'(-1) = 2 \times (-1) - 2 = -4$.

   f est dérivable en -1 donc son graphe admet une tangente en -1.
   Comme $f(-1) = 6$ et $f'(-1) = -4$ une équation de la tangente en -1 est

   $$y = -4(x - (-1)) + 6.$$

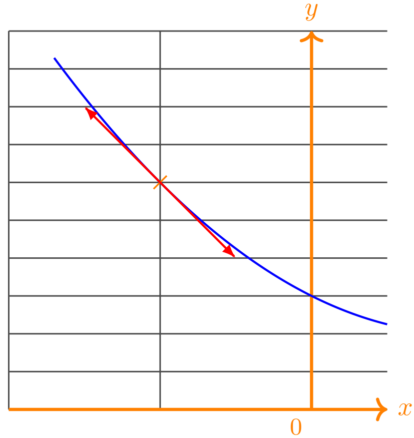
   Autrement dit

l'équation réduite de la tangente au graphe de f en -1 est :
$y = -4x + 2$.

Pour représenter graphiquement la tangente on place le point commun au graphe et à la tangente dont nous connaissons les coordonnées $(-1{,}6)$.

Puis nous plaçons n autre point par lecture graphique avec le coefficient directeur ou par le calcul avec l'équation de la tangente.

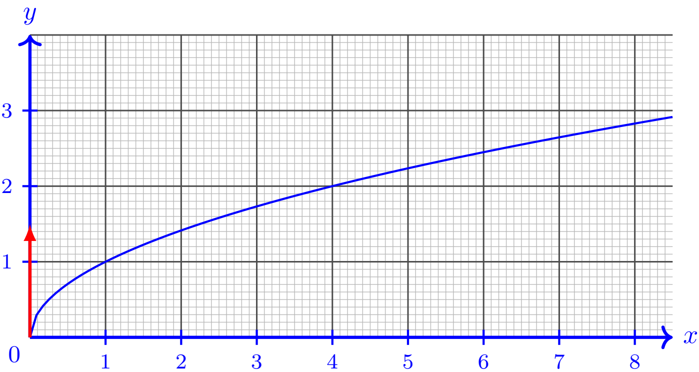
Pour distinguer les tangentes des autres tracés nous les dessinerons le plus souvent comme des segments munis de flèches aux extrémités.



2. Demi-tangente verticale en zéro de la fonction racine carrée.

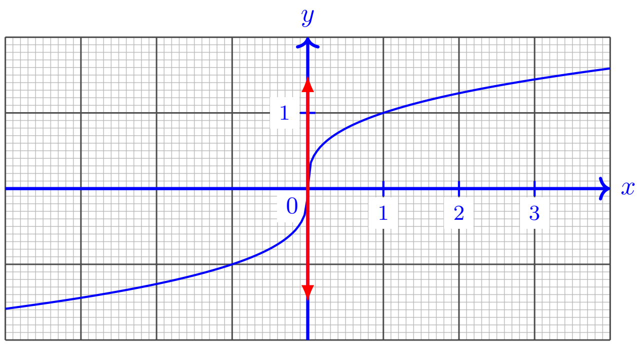
   Nous avons vu que la limite à droite en 0 du taux d'accroissement de la fonction racine carrée est $+\infty$. dans un tel cas on dit que la fonction admet une demi tangente verticale (orientée vers le haut).

   Cette situation se représente de la façon suivante.



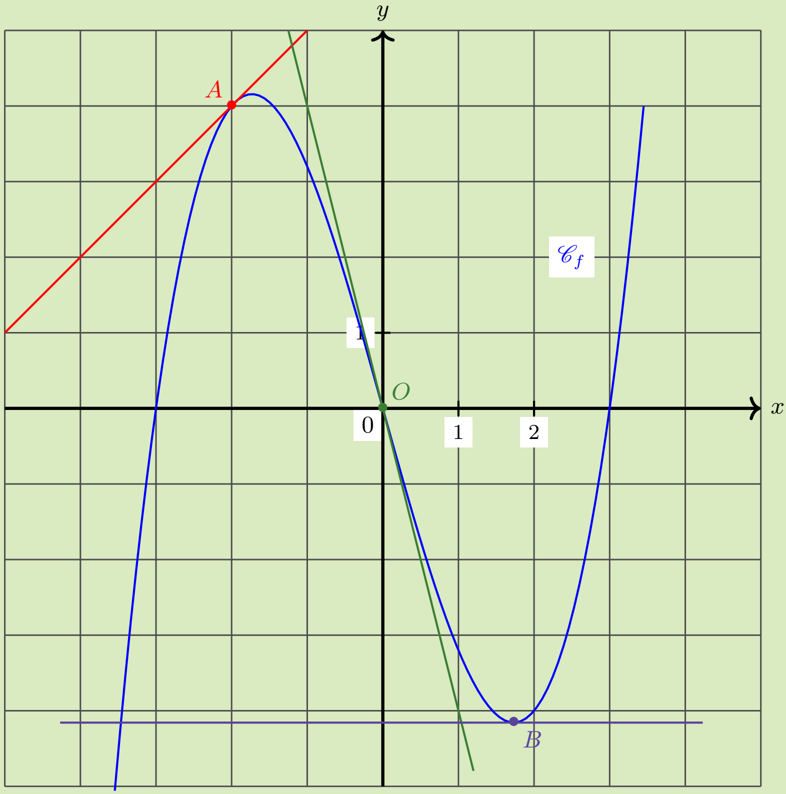
3. Tangente verticale en zéro de la fonction racine cubique.
   Nous avons déjà vu que :
   - $\tau_{\sqrt[3]{\cdot}}(0,x) \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty$.
   - $\tau_{\sqrt[3]{\cdot}}(0,x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$.

   Par conséquent la fonction racine cubique admet une demi-tangente verticale orientée vers le bas en 0 et une demi-tangente verticale orientée vers le haut en 0. Si bien que nous dirons que racine cubique admet une tangente verticale en zéro.



Exercice 2.

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes à cette courbe aux points $A(-2;4)$, $O(0{,}0)$ et $B(\sqrt{3};0{,}4\sqrt{3}^3-3{,}6\sqrt{3})$.



1. Déterminez les nombres dérivés de f en -2, en 0 et en $\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en, les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A, O et B.

Exercice 3.

Soit f une fonction dérivable en 3 et telle que $f(3)=4$ et $f'(3)=\frac{1}{3}$.
Tracez la tangente au graphe de f en 3 puis proposez une allure possible du graphe de f au voisinage de 3.

III Fonction dérivée.

1 Définition.

Définition 4

Soit :

. f une application définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

Nous dirons que f est *dérivable sur E* si et seulement si, pour tout $a \in E$, f est dérivable en a.

Dans ce cas on appelle fonction dérivée de f la fonction :

$$f' := \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array} \right.$$

Proposition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $f_n : x \mapsto x^n$ l'application définie sur $\mathbb{R}$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus

(i) $f_0' = 0$.

(ii) et si $n > 0$ alors $f'(x) = nx^{n-1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$.

$$\begin{aligned} \tau_{f_n}(a,x) &= \frac{x^n - a^n}{x-a} \\ &= \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} \end{aligned}$$

Or, par continuité des fonctions polynomiales,

$$x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1} \xrightarrow[x \to a]{} a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1}$$

donc

$$\tau_{f_n}(a,x) \xrightarrow[x \to a]{} na^{n-1}.$$

■

Exemples.

1. Nombre dérivé.
2. Fonction dérivée,
3. Tangente.

Remarques.

1. Pour f_0, donc une fonction constante, nous avons la caractérisation : une fonction est constante si et seulement si sa dérivée est nulle.

Proposition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $f_n : x \mapsto \frac{1}{x^n}$ l'application définie sur $\mathbb{R}^*$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{n}{x^{n+1}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Démonstration

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{a\}$.

$$\begin{aligned}
\tau_{f_n}(a,x) &= \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{a^n}}{x-a} \\
&= \frac{a^n - x^n}{a^n x^n (x-a)} \\
&= \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{a^n x^n (x-a)} \\
&= \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{a^n x^n}
\end{aligned}$$

Donc

$$\tau_{f_n}(a,x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \frac{na^{n-1}}{a^n a^n}.$$

Ainsi

$$\boxed{f_n \text{ est dérivable en } a \text{ et } f_n'(a) = \frac{n}{a^{n+1}}.}$$

■

Proposition 4

La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.

Démonstration

La démonstration suivante se veut élémentaire et ne fait donc pas appelle à la définition de sin comme somme de série entière.

* Démontrons que $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Admettons dans un premier temps que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.

Or, par continuité de cos

$$\cos(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 1,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 1.$$

Si $x \in \left]-\frac{\pi}{2},0\right[$ alors on a $\cos(-x) \leqslant \frac{\sin(-x)}{-x} \leqslant 1$. Puis par parité de cos et imparité de sin : $\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.

On obtiendra donc de la même façon

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} 1.$$

Enfin

$$\boxed{\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.}$$

* Démontrons que sin est dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

$$\tau_{\sin}(a,a+h) = \frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}$$

En utilisant une formule d'addition $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$ nous obtenons :

$$\begin{aligned}\tau_{\sin}(a,a+h) &= \frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\ &= \sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

En utilisant la formule $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ nous avons :

$$\begin{aligned}\tau_{\sin}(a,a+h) &= \sin(a)\frac{-2\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h}\\ &= -\frac{h\sin(a)}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)^2+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h}\end{aligned}$$

Puisque $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$

$$\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

Finalement

$$\tau_{\sin} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \cos(a).$$

Autrement dit

$$\boxed{\sin \text{ est dérivable en } a \text{ et } \sin'(a) = \cos(a).}$$

* Démontrons que que pour tout $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ on a $\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$.

■

Proposition 5

La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

Démonstration

$\cos(x) = \sin(x+\frac{\pi}{2})$ et composition ou reprendre la démarche utilisée pour le sinus.

■

Proposition 6

La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Démonstration

Ce n'est pas vraiment une proposition puisque c'est par définition de la fonction exponentielle en tant que solution d'une équation différentielle.

■

2 Calculer une fonction dérivée.

Proposition 7 - Linéarité de la dérivation.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$,

. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E alors $\lambda f + g$ est dérivable sur E et

$$(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\tau_{\lambda f+g}(a,x) &= \frac{(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(a)}{x-a} \\
&= \frac{\lambda f(x) + g(x) - \lambda f(a) - g(a)}{x-a} \\
&= \lambda \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \\
&= \lambda \tau_f(a,x) + \tau_g(a,x)
\end{aligned}$$

■

Proposition 8 - Dérivation d'un produit.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E alors fg est dérivable sur E et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\tau_{fg}(a,x) &= \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}\\
&= \frac{[f(x)-f(a)]g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\
&= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\
&= \tau_f(a,x)g(a)+f(a)\tau_g(a,x)
\end{aligned}$$

■

Proposition 9 - Dérivation de l'inverse.

Soient :

. g une fonction définie sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si g est dérivable sur E et que g ne s'annule pas sur E alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur E et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}.$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\tau_{\frac{1}{g}}(a,x) &= \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a}\\
&= \frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(a)g(x)}}{x-a}\\
&= -\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\times\frac{1}{g(a)g(x)}
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1 - Dérivation d'un quotient.

Soient :

. f et g des fonctions définies sur $E \subset \mathbb{R}$.

Si f et g sont dérivables sur E et que g ne s'annule pas sur E alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur E et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}.$$

Démonstration

Découle des deux précédentes propositions appliquées à f et $\frac{1}{g}$.

■

Proposition 10

La fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Exercice 4.

Étudier la dérivabilité de la fonction cotangente définie par $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$ sur $]0,\pi[$.

3 Fonctions composées.

Proposition 11

Soient :

. $E \subset \mathbb{R}$,

. $F \subset \mathbb{R}$,

. $f : E \to F$ une application,

. $g : F \to \mathbb{R}$ une application,

. $a \in E$.

Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = \left(g' \circ f(a)\right) \times f'(a).$$

Démonstration

La notion de développement limité n'ayant pas encore été vue cette démonstration semblera très déroutante puisqu'elle y fait appel.

*

$$\tau_f(a,a+h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

donc

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \tau_f(a,a+h)h \\ &= f(a) + f'(a)h + \left(\tau_f(a,a+h) - f'(a)\right)h \end{aligned}$$

En notant $\varepsilon_1(h) = \tau_f(a,a+h) - f'(a)$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon_1(h)h$$

où $\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$

*

D'une part :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon_1(h)$$

d'autre part :

$$g\left(f(a)+k\right) = g\left(f(a)\right) + g'\left(f(a)\right)k + k\varepsilon_2(k)$$

donc :

$$\begin{aligned} g\circ f(a+h) &= g\left(f(a+h)\right) \\ &= g\left(f(a) + f'(a)h + h\varepsilon_1(h)\right) \end{aligned}$$

puis comme $f'(a)h + h\varepsilon_1(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} g\circ f(a+h) = g\left(f(a)\right) &+ g'\left(f(a)\right)\left[f'(a)h + h\varepsilon_1(h)\right] \\ &+ \left[f'(a)h + h\varepsilon_1(h)\right]\varepsilon_2\left[f'(a)h + h\varepsilon_1(h)\right] \end{aligned}$$

Notons $\varepsilon(h) = g'\left(f(a)\right)h\varepsilon_1(h) + \left[f'(a)h + h\varepsilon_1(h)\right]\varepsilon_2\left[f'(a)h + h\varepsilon_1(h)\right]$

$$g\circ f(a+h) = g\left(f(a)\right) + hf'(a)g'(f(a)) + h\varepsilon(h)$$

comme $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$$\frac{g\left(f(a+h)\right) - g\left(f(a)\right)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)g'\left(f(a)\right).$$

■

Exemples.

1. Dérivabilité de cos à partir de celle de sin grâce à la formule $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Proposition 12

La fonction $f_\alpha : x \mapsto x^a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Corollaire 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$.

. $f_n : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ si n est pair est $\mathbb{R}$ sinon.

- Si n est pair alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si n est impair alors f_n est dérivable sur $\mathbb{R}*$.

Pour tout réel x du domaine de dérivabilité de f_n

$$f'_n(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}.$$

Démonstration

On distingue les deux cas suivant la parité de n.

Lorsque n est impair on utilise l'imparité de la fonction pour compléter l'étude du cas $\mathbb{R}_+$.

■

Exemples.

1. Si $n = 2$
2. Si $n = 3$.

4 Fonction réciproque.

Proposition 13

Soient :

. $E \subset \mathbb{R}$,

. $f : E \to \mathbb{R}$ une application,

. $a \in E$.

Si

- f est strictement monotone,
- f est continue,
- f est dérivable en a,
- et $f'(a) \neq 0$

alors $f^{-1} : f(E) \to E$ est dérivable en $f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Démonstration

Puisque f est strictement monotone et continue, f réalise une bijection de E sur $f(E)$ dont la réciproque $f^{-1} : f(E) \to E$ est continue sur $f(E)$ et a la même monotonie.

Soit y dans un voisinage ouvert de $f(a)$ mais distinct de $f(a)$.

$$\begin{aligned}\tau_{f^{-1}}(f(a), y) &= \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} \\ &= \frac{f^{-1}(y) - a}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(a)\right)}\end{aligned}$$

Or $f^{-1}(y) \underset{y \to f(a)}{\longrightarrow} a$ donc

■

Remarques.

1. Une autre formulation que nous utiliserons plus souvent dans les exercices, en posant $y = f(a)$, la formule devient :

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Proposition 14

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Proposition 15

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Exercice 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}e^x$.

1. Justifiez que f induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J à préciser.
2. On note g la bijection réciproque. Montrez que g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
3. Étudiez la dérivabilité de g en 0.

Exercice 6.

Montrer que chacune des fonctions suivantes est une bijection de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on précisera. Donnez les propriétés de f^{-1} sur J.

1. $f(x) = x^3 - 8x + 1$ et $I = [-1;1]$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ et $I = [1;+\infty[$.

Exercice 7.

1. Montrez que la fonction f définie par $f(x) = \tan^3(x)$ sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ est une bijection de I dans un intervalle J à déterminer.
2. Étudiez la dérivabilité de f^{-1} sur J.
3. Déterminez $\left(f^{-1}\right)'(1)$.

IV Développement limité.

1 Négligeable.

Définition 5

Soient :

. $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. f et g des applications définies sur un voisinage de a.

f est dite *négligeable devant* g *au voisinage de* a si et seulement si il existe une fonction ε définie sur un voisinage de a telle que :

(i) $f = g\varepsilon$ au voisinage de a,

(ii) et $\varepsilon(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas on note $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Proposition 16

Soient :

. $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. f et g des applications définies sur un voisinage de a.

Si g ne s'annule pas sur un voisinage de a alors

$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0.$$

Remarques.

1. La plupart des cas que nous considérerons relève de cette proposition et nous l'utiliserons donc prioritairement.

Exemples.

1. On retrouve tous les résultats de croissances comparées vus sur les fonctions.

   * En $+\infty$.
   Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   Si $a < b$

$$x^a \underset{x \to +\infty}{=} o\left(x^b\right)$$

Si $b > 0$

$$(\ln(x))^a \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^b\right)$$

Si $b > 0$

$$x^a \underset{x\to+\infty}{=} o\left(b^x\right)$$

* En zéro.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Si $a > b$

$$x^a \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} o\left(x^b\right)$$

Si $b \neq 0$

$$|\ln(x)|^a \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{=} o\left(x^b\right)$$

* En $-\infty$.

Si $b > 0$

$$b^x \underset{x\to-\infty}{=} o\left(|x|^a\right)$$

Proposition 17

Soient :

. $E \subset \mathbb{R}$,

. $a \in E \cup \{-\infty, +\infty\}$,

. $f : E \to \mathbb{R}$ une application,

. $g : E \to \mathbb{R}$ une application.

(i) Si $\lambda \neq 0$ et $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$ et $f \underset{a}{=} o(\lambda g)$.

(ii) Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.

(iii) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.

(iv) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$.

(v) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

(vi) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $\lim_b \varphi = a$ alors $f \circ \varphi \underset{b}{=} o(g \circ \varphi)$.

Exemples.

Pas d'exemple confer infra développement limité.

Remarques.

1. Le (i) peut s'imagé par : le petit o absorbe le coefficient multiplicateur.
2. Le (ii) peut s'imager par : la somme de deux petit o est un petit o.
3. Le (iii) peut s'imager par un petit o d'un petit o est u petit o, ou encore il y a un transitivité du petit o.
4. Le (iv) et (v) peuvent s'imager par : avec le produit tout se passe bien.
5. Le (vi) peut s'imager par : avec la composition à droite tout se passe bien.

2 Développement limité d'ordre 0.

Lemme 1

f est continue en a si et seulement si il existe un voisinage ouvert de a sur lequel : $f(x) = f(a) + \underset{x\to a}{o}(1)$.

Démonstration

f est continue en a si et seulement si $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit si et seulement si $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} o(1)$.

■

3 Développement limité d'ordre 1.

Théorème 1

f est dérivable en a si et seulement si il existe des réels α et β tels que, dans un voisinage ouvert V de a :

$$\forall x \in V,\ f(x) = \alpha + \beta(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)\,.$$

Et dans ce cas $\alpha = f(a)$ et $\beta = f'(a)$.

Remarques.

1. Ainsi, si f est dérivable en a alors, *f admet un développement limité à l'ordre 1 en a* qui est

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a).$$

2. Pour se ramener à développement limité en 0 plutôt qu'en a nous écrirons

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h\to 0}{o}(h).$$

3. De la même façon f est continue en a si et seulement si $f(a+h) = f(a) + \underset{h\to 0}{o}(1)$.
4. L'équivalence ente l'existence d'un développement limité et la continuité ou la dérivabilité ne se généralise à des dérivations d'ordre supérieur.

Démonstration

* Supposons f dérivable en a : $\tau_f(a,a+h) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)$. Donc

$$\tau_f(a,x) - f'(a) \underset{x\to a}{=} o(1)$$

Le résultat étant clair pour $x = a$ supposons $x \neq 0$ et donc :

$$f(x) - f(a)(x-a)f'(a) = \underset{x\to}{o}(x-a)f(x) \quad = f(a) + (x-a)f'(a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$$

* Supposons que $f(x) = \alpha + \beta(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$ sur un voisinage ouvert de a.

Nous en déduisons $f(x) = \alpha + \underset{x\to a}{o}(1)$ et donc f est continue en a et $f(a) = \alpha$.

De $f(x) = f(a) + \beta(x-a) + \underset{x\to a}{o}(x-a)$ nous déduisons si $x \neq a$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta + \underset{x\to a}{o}(1)$$

D'où $\tau_f(a,x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \beta$.

Enfin : f est dérivable en a et $f'(a) = \beta$.

■

Exemples.

1. $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
   $2e^x = 2 + 2x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
2. $\sin(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

$$e^x + \sin(x) = \left(1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) + \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)$$

   Formellement :

$$\text{"}e^x + \sin(x) = 1 + 2x + \underset{x\to 0}{o}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x)\text{"}$$

   Or "$\underset{x\to 0}{o}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x) = \underset{x\to 0}{o}(x)$" donc on écrira

$$e^x + \sin(x) = 1 + 2x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

3. $\ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.

$$e^x \ln(x+1) =$$

4. $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
5. $\tan(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$.
6. $e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \underset{x\to +\infty}{o}(x)$
7. $\sqrt{x} = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$ donc $\sqrt{\ln(x)} = \underset{x\to +\infty}{o}(\ln(x))$.

Remarques.

1. On ne fait des opérations que sur des développements limités au même point a.

V Dérivation et extremum.

Théorème 2 - Théorème de Fermat.

Soient
. $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,
. $c \in]a,b[$,
. $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application dérivable en c.

Si f possède un extremum local en c, alors $f'(c) = 0$.

Remarques.

1. La notion d'extremum local en c suppose de pouvoir trouver un voisinage ouvert $]a',b'[\subset I$ sur lequel f admet un extremum absolu en c.
2. Pour obtenir une équivalence il faut ajouter des conditions, comme : f' s'annule en changeant de signe.

Démonstration

Quitte à considérer un voisinage de c nous pouvons supposer que $f(c)$ est un extremum global, ce que nous supposerons pour cette démonstration.

Supposons, par exemple, que $f(c)$ est un maximum :

$$\forall x \in]a,b[,\ f(x) \leq f(c)$$

Soit $x \in]a,c[$.

$$\begin{cases} f(x) - f(c) \leq 0 \\ x - c < 0 \end{cases} \Rightarrow \tau_f(c,x) \geq 0$$

Puisque f est dérivable en c, $f'_g(c)$ existe et

$$f'_g(c) = \lim_{\substack{x \to c \\ x \in [c,c+\epsilon[}} \tau_f(c,x) \geq 0$$

De même nous établirions que $f'_d(c) \leq 0$. Or f étant dérivable en c, $f'_g(c) = f'_d(c) = f'(c)$, donc, nécessairement $f'(c) = 0$.

■

VI Égalité des accroissements finis.

1 Théorème de Rolle.

Théorème 3 - Théorème de Rolle.

Soient
. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$,
. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application,
. f continue sur $[a,b]$,
. f dérivable sur $]a,b[$.

$$f(a) = f(b) \implies \exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$$

Remarques.

1. La démonstration repose sur l'idée que dans ce cas la fonction possède nécessairement un extremum local et de conclure grâce au théorème de Fermat.

Démonstration

f est continue sur le compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ donc $f([a,b])$ est un compact de $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} m \leq M \\ f([a,b]) = [m,M] \end{cases}$$

— Si $m = M$ alors f est la fonction constante, donc sa dérivée est nulle.
— Supposons que $m < M$. Alors $f(a) \neq m$ ou $f(a) \neq M$. Supposons par exemple $f(a) \neq m$. Puisque m est le minimum de f et qu'il diffère de $f(a)$ (et de $f(b)$)

$$\exists c \in]a,b[,\ f(c) = m$$

Si f admet un minimum en c alors sa dérivée s'annule en c, d'après le théorème de Fermat.

■

2 Égalité des accroissements finis.

Théorème 4 - Théorème des accroissements finis

Soient
. $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,
. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application,
. f continue sur $[a,b]$,
. f dérivable sur $]a,b[$.

$$\exists c \in]a,b[,\ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Remarques.

1. L'expression « accroissement fini » provient d'une époque où en calcul différentiel on faisait une distinction entre les accroissements infinitésimaux dx et les accroissements « finis » $x_1 - x_0$.

Démonstration

Soit $\varphi : \begin{cases} [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot x \end{cases}$.

φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ce qui permet de conclure.

■

Remarques.

1. Applications : prolongement de la dérivée, caractérisation des fonctions lipschitziennes dérivables.

3 Inégalité des accroissements finis.

Théorème 5 - Inégalité des accroissements finis.

Soient

. $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$,

. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application,

. f continue sur $[a,b]$,

. f dérivable sur $]a,b[$,

. $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in]a,b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M|b-a|.$$

Remarques.

1. Une variante pour la condition sur l'encadrement : $\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M$ et alors
$$|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

Exercice 8.

Soit $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ une application définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudiez f.
2. On souhaite étudier l'équation $f(x) = x$.
   (a) Expliquez pourquoi $f(x) = x$ n'admet pas de solution négative.
   (b) Montrez que $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$;
3. Étudiez les variations de f' sur $\mathbb{R}_+$ puis déduisez-en que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$

$$\left|f'(x)\right| \leqslant \left|f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|.$$

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 0{,}5 \\ u_{n+1} & = & f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

   (a) Justifiez : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.
   (b) *On admettra que* $\left|f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \leqslant 0{,}9$. Montrez à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}9|u_n - \alpha|.$$

   (c) Déduisez-en la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Correction de l'exercice 8</u>

1. f est paire, dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(0) = 1$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2. (a) Si $x \leqslant 0$, comme $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0$, alors l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution.
   (b) Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $g(\mathbb{R}_+) =]-\infty, 1]$.
   Comme $0 \in]-\infty, 1]$ il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) - x = 0$.

3. f' est dérivable sur$\mathbb{R}_+$ puisque c'est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x) = (4x^2 - 1)\mathrm{e}^{-x^2} = 4\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}$. (On peut aussi étudier le signe du trinôme $4x^2 - 1$.)

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f'	0	$\searrow$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	0

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
Et donc $|f'(x)| \leqslant \left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|$.

4. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant 0$ ».

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est toujours vraie.

* $u_0 = 0{,}5$ donc $u_0 \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
* Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
$u_n \in [0, +\infty[$ or $f([0, +\infty[) =]0; 1]$ donc $u_{n+1} \in]0; 1]$ et $u_{n+1} \geqslant 0$.
Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
* Nous avons démontré par récurrence que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$, dérivable sur $]0; 1[$ et $|f'| \leqslant \left|f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right|$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout a et b dans $[0; 1]$

$$|f(a) - f(b)| \leqslant |b - a|$$

Pour $a = u_n$ et $b = \alpha$:

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \left|f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \times |u_n - \alpha|$$

Comme $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(\alpha) = \alpha$, et $\left|f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \leqslant 0{,}9$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}9|u_n - \alpha|$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant 0{,}9|u_n - \alpha|.$$

(c) Puisque $0{,}9 \in]-1;1[$, $0{,}9|u_n - \alpha| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\lim u_n = \alpha$.

Exercice 9. ⚽

Soit g la fonction définie par $g(x) = x + \frac{1}{2}(x^2 + 4x + 5)e^{-x}$

1. Déterminez g'.
2. Démontrez que l'équation $g'(x) = 0$ admet une unique solution α
   On admettra que $\alpha \in [-2;-1]$.
3. Étudiez les variations de g.
4. L'objet de cette question est de trouver des valeurs approchées de α.
   (a) Démontrez que $\alpha = -\sqrt{2}e^{\frac{\alpha}{2}} - 1$.
   (b) Soit φ l'application définie sur $[-2,-1]$ par $\varphi(x) = -1 - \sqrt{2}e^{\frac{x}{2}}$.
   Démontrez que si a et b sont des réels de l'intervalle $[-2,-1]$ alors $|varphi(a) - \varphi(b)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}}|a-b|$.
   (c) Démontrez que si $x \in [-1,-1]$ alors $f(x) \in [-2,-1]$.
   (d) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in [-2,-1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   Démontrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
   (e) Justifiez que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Exercice 10. ⚽

VII Étude des variations.

1 Monotonie.

Théorème 6 - Dérivation et monotonie.

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

Pour que f soit croissante sur I il faut et il suffit que

$$\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0.$$

Démonstration

Démontrons le résultat par conditions nécessaire et suffisante.

1. Supposons f croissante sur I et démontrons qu'alors : $\forall x \in \mathring{I},\ f' \geq 0$.

   Soit $x_0 \in \mathring{I}$.
   f est croissante sur I si et seulement si

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

   Donc, quelque soit $y \in I$ si $x_0 < y$, alors $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geq 0$.
   De même si $x_0 < y$ alors $\frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geq 0$.
   Autrement dit

   $$\forall y \in I,\ \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0} \geq 0$$

   Puisque $x_0 \in \mathring{I}$, f est dérivable en x_0 et en passant à la limite lorsque y tend vers x_0 dans l précédente inégalité nous obtenons

   $$\lim_{y \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{y-x_0} \geq 0$$

   Autrement dit

   $$\boxed{\forall x_0 \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0}$$

2. Réciproquement supposons : $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$. Démontrons qu'alors f est croissante sur I.

   Nous allons démontrer

   $$\forall (x,y) \in I,\ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

   Soit $(x_1,x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$ et f est dérivable sur $]x_1,x_2[$.
   D'après le théorème des accroissements finis

   $$\exists c \in]x_1,x_2[,\ f(x_2) - f(x_2) = (x_2 - x_1) f'(c)$$

   Or par hypothèse $f'(c) \geq 0$ donc

   $$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

   Autrement dit : $f(x_1) \leq f(x_2)$.
   Donc f est croissante sur tout ouvert inclus dans $\mathring{I}$.

   Par recollement nous en déduisons, grâce à la continuité de f, le résultat sur I tout entier.

   $$\boxed{f \text{ est donc croissante sur } I.}$$

■

Remarques.

1. La démonstration serait simplifiée en considérant un intervalle ouvert $]a,b[$ sur lequel f est dérivable plutôt que I.
2. Ainsi le résultat reste même si la fonction n'est pas dérivable sur un ensemble d'intérieur vide de valeurs de I. Ce qui est le cas s'il s'agit d'un nombre fini ou dénombrable de valeurs pour lesquelles la fonction n'est pas dérivable (ensembles d'intérieur vide dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle).
3. En appliquant ce théorème à $-f$ nous obtiendrions un résultat analogue sur la décroissance.

2 Stricte monotonie.

Lemme 2- Dérivée nulle sur un ouvert.

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Si

$$\forall x \in\ ]a,b[,\ f'(x) = 0$$

alors f est constante sur $[a,b]$.

Démonstration

Supposons que f' est nulle sur $]a,b[$ et démontrons : $\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ f(x) = f(y)$.

Soit $(x,y) \in [a,b]^2$.
Supposons par exemple $x < y$.
D'après le théorème des accroissements finis :

$$\exists c \in]x,y[,\ f(x) - f(y) = (x-y)f'(c)$$

Or $f'(c) = 0$ par hypothèse, donc

$$f(x) - f(y) = 0$$

Si $f' = 0$ sur $]a,b[$ alors f est constante sur $[a,b]$.

■

Remarques.

1. Ce résultat se généralise par recollement à une fonction f continue sur un intervalle I non trivial et dérivable sur $\mathring{I}$ dont la dérivée s'annule sur $\mathring{I}$.
2. Réciproquement, si f est constante alors sa dérivée est nulle.

Exercice 11. ☯
Déterminez pour tout réel x non nul la valeur de $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Correction de l'exercice 11
$\varepsilon(x)\frac{\pi}{2}$.

Théorème 7

Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$.

f est strictement croissante si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geq 0$

(ii) $\left\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ est d'intérieur vide.

Démonstration
Démontrons le résultat par conditions nécessaire et suffisante.

1. Supposons f strictement croissante et démontrons les points (i) et (ii).

   (i) D'après le théorème liant dérivation et monotonie f étant croissante sur I, f' est positive sur $\mathring{I}$.

   (ii) Démontrons que l'ensemble $J = \left\{x \in \mathring{I} \mid f'(x) = 0\right\}$ est d'intérieur vide en raisonnant par l'absurde.

   Supposons que J n'est pas d'intérieur vide et établissons une contradiction.

   J n'est pas d'intérieur vide signifie qu'il existe un ouvert (non vide) contenu dans J :
$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} a < b \\ ]a,b[\subset J \end{cases}$$
   Donc
$$\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$$
   et d'après le lemme précédent f est donc constante sur $]a,b[$.
   Ceci contredit la stricte monotonie de f.

Nous avons démontré par l'absurde que, nécessairement, J est d'intérieur vide.

Finalement

Nous avons démontré que si f est strictement croissante alors $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$ est J et d'intérieur vide.

2. Réciproquement supposons que $\mathring{J} = \varnothing$ et que $f' \geq 0$ sur $\mathring{I}$.

   (a) D'après le précédent théorème nous savons que f est croissante sur I.

   (b) Pour montrer la stricte croissance de f raisonnons par l'absurde.

   Supposons que f n'est pas strictement croissante et vérifions que cela conduit à une contradiction.

   Si f croissante mais pas strictement croissante sur I alors

$$\exists (a,b) \in I, \begin{cases} a < b \\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

   Et puisque f est croissante cela implique

$$\forall x \in [a,b], \ f(x) = f(a)$$

   Donc $f' = 0$ sur $]a,b[$. Ainsi : $]a,b[\subset J$.
   Ceci contredit le fait que J est d'intérieur vide.

   Nous avons démontré par l'absurde que f est strictement croissante sur I.

■

Remarques.

1. En considérant $-f$ nous en déduisons un résultat similaire pour une fonction strictement décroissante.
2. f est croissante si et seulement si f' est positive (ou nulle).
3. Un cas particulier usuel : si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.

VIII Dérivées successives.

IX Exercices.

Exercice 12.

Étudiez la dérivabilité et donnez la dérivée des fonctions dont l'expression algébrique est

a) x^x,

b) $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$,

c) $\ln|\ln(x)|$,

d) $\arctan(\ln(x))$.

Exercice 13.

Étudiez la dérivabilité de f en 0 dans les cas suivants.

a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$,

b) $f(x) = x^2\ln(x)$ et $f(0) = 0$.

c) $f(x) = \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ \mathrm{e}^x - 1 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Exercice 14.

Donnez l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$.

b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x}$.

c) $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

d) $f(x) = \sin(2x^2 - x + 1)$.

Exercice 15.

Dites si la fonction f est prolongeable par continuité et le cas échéant si son prolongement est dérivable en 0.

a) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) \end{cases}$.

b) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\sin(x)}{x} \end{cases}$.

c) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + x^3\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{cases}$.

Correction de l'exercice 15

Les fonctions proposées sont paires ou impaires inutile de regarder à droite et à gauche de 0.

a) $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to+}{\longrightarrow} 0$ car $x^a \underset{x\to+\infty}{=} o(b^x)$ avec $b > 0$.

Remarquons que le taux d'accroissement ne pouvait pas converger vers une autre valeur que 0 en 0 car la fonction est paire.

b) Résultat de cours : $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

c) $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.
$\tau_f(0,x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$.

Exercice 16.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, on pose $P_\lambda(x) = x^3 + \lambda x - 1$.

1. Montrez que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, le polynôme P_λ a une unique racine réelle notée $u(\lambda)$.
2. Montrez que l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & u(\lambda) \end{array} \right.$ est monotone et continue.
3. Tracez le graphe de u.

Exercice 17.

Montrez que la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x+1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 3-x & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \right.$ n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 18.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-1}{x}$ pour tout $x < -2$, $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x > 4$, $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in [-2;4]$.

1. Déterminez les limites à droite et à gauche de la fonction en -2 et 4.
2. À quelles conditions sur (a,b) la fonction f est-elle continue ?
3. Dans ces conditions, la fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 19.

On pose pour tout $s \in [0;1[$, $f(s) = \dfrac{1}{(1-s)^2}$.

1. Dressez le tableau de variation de f.
2. Déterminez l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
3. Représentez sur une même figure Δ et $\mathscr{C}$.

Exercice 20.

On pose $f : x \mapsto x\ln(x) - x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Calculez $f(1)$ et $f(e)$.
2. Calculez $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Dressez le tableau de variation de f.
4. Calculez l'équation de Δ, tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse e.
5. Représentez sur une même figure Δ et $\mathscr{C}$.

<u>Correction de l'exercice 20</u>

1. $f(1) = -1$ $f(\mathrm{e}) = 0$.
2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. $f'(x) = \ln(x)$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

4. $\Delta :\ y = x$.

Exercice 21.

Dressez le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto x - x^2$ définie sur $[0;1]$.

Exercice 22.

1. Étudiez les variations de $f : x \mapsto \dfrac{x^2+1}{2x-1}$ définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et montrez qu'elle admet un minimum.
2. Montrez que les domaine de définition de f est stable par f.

Exercice 23.

Montrez que pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $u\ln(u) \geqslant u - 1$.

Exercice 24.

Montrez que $-x - 2x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant x$ pour tout $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 25.

Montrez que pour tout $x \in [0;1]$, $\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{4}$

Exercice 26.

1. Étudiez les variations de $\varphi : y \mapsto \mathrm{e}^y - y$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déduisez-en que cette fonction est minorée par 1.
3. Montrez que pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\varphi(y) \leqslant \varphi(|y|)$.

Exercice 27.

Montrer que pour tout entier k strictement positif, la fonction $f : x \mapsto x^k \ln(x)$ admet un minimum et calculer la valeur de ce minimum.

Exercice 28.

Soient $u,v \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminez les variations de $f : x \mapsto xu - v(\mathrm{e}^x - 1)$.
2. À quelles conditions cette fonction atteint-t-elle un maximum en un réel strictement positif ?

Exercice 29.

Soient f l'application définie par $f(t) = \frac{t^2+1}{4}$ si $t \in [0;1]$, constante sur $]-\infty,0]$ et sur $[1,+\infty[$.
f est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 30.

On considère pour n entier naturel non nul la fonction numérique f_n définie sur $[0,+\infty[$ par

$$\begin{cases} f_n(x) &= x^n (\ln(x))^2, \quad \text{si } x \in]0,+\infty[\\ f_n(0) &= 0. \end{cases}$$

On appelle $(\mathscr{C}_n)$ la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormal. *Pour les représentations graphiques vous pourrez choisir* 4 cm *pour une unité.*
Question préliminaire : montrez que f_n est prolongeable par continuité en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans cette question on choisit $n = 1$.
   (a) Étudiez la dérivabilité de f_1 en 0.
   (b) Établissez le tableau de variation de f_1.
   (c) Construisez $\mathscr{C}_1$.
   (d) i. Écrire une équation cartésienne de la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ en son point d'abscisse x_0 (x_0 réel strictement positif donné).
       ii. Quelle relation x_0 doit-il vérifier pour que cette tangente passe par le point A de coordonnées $(2; 0)$?
   (e) i. Établir le tableau de variations de la fonction numérique h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 2 - x + \ln x$.
       ii. Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $]0; +\infty[$ deux solutions distinctes.
       iii. Déduire des questions précédentes le nombre de tangentes, autres que l'axe des abscisses, à la courbe $(\mathscr{C}_1)$ issues du point $A(2; 0)$?
2. Dans cette question $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Étudier, pour $n \geqslant 2$, la dérivabilité de f_n en 0.
   (b) Établir, pour $n \geqslant 2$, le tableau de variations de f_n.
   (c) Étudier, pour n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la position relative des courbes $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$.
   (d) Construire la courbe $(\mathscr{C}_2)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_1)$ en précisant sa tangente au point O.

Exercice 31.

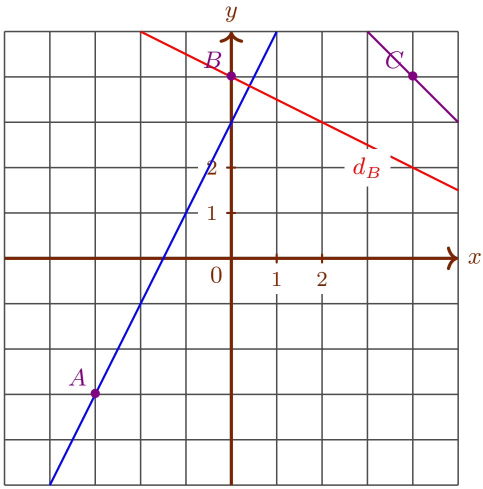
Exercice 32.

Exercice 33.

Considérons une fonction f définie sur $[-5;5]$.

1. Dans un repère orthonormé dessinez les points $A(-3,-3)$, $B(0{,}4)$ et $C(4{,}4)$.
2. Tracez les tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, B et C d'équations réduites respectives $d_A : y = 2x+3$, $d_B : y = -\frac{1}{2}x+4$ et $d_C : y = -x+8$.
3. Tracez à main levée une courbe représentative possible pour f.

Correction de l'exercice 33



Exercice 34.

Soit la fonction g définie sur $I = \left[2, \frac{5}{2}\right]$ par : $g(x) = \ln(x+1)+1$.
Nous admettrons que g admet un unique point fixe α appartenant à I, autrement dit $g(\alpha) = \alpha$.

1. (a) Démontrer que I est stable par g (c'est-à-dire que pour tout élément x de I, $g(x)$ appartient à I).
   (b) Montrez que pour tout élément x de I : $0 \leqslant g'(x) \leqslant \frac{1}{3}$.
   (c) Déduisez-en que pour tout élément x de I, $|g(x)-\alpha| \leqslant \frac{1}{3}|x-\alpha|$.
2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Établissez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
   Le $\frac{1}{2}$ correspond à la valeur maximale de $|x-\alpha|$.
   (b) Déduisez-en la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.