Limite de fonctions et continuité.

I Voisinage.

II Limites.

1 Définition.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \in J.$$

Remarques.

1. Une application est une fonction dont le domaine de définition coïncide avec l'ensemble de départ.
2. Si f admet ℓ pour limite en a alors nous noterons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

   ou

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

   ou encore

$$\lim_{a} f = \ell.$$

3. Voici une visualisation de cette définition avec Geogebra.

2 Exemples de référence.

Proposition 1 - Fonctions puissances.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $a \in \mathbb{R}$,

. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) $x^n \xrightarrow[x \to a]{} a^n$.

(ii) $x^n \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

(iii) Si n est pair alors : $x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.

(iv) Si n est impair alors : $x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.

(v) Si $a > 0$ alors : $x^\alpha \xrightarrow[x \to a]{} a^\alpha$.

(vi) $x^\alpha \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$|x| \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad |x| \xrightarrow[x \to a]{} |a|.$$

Proposition 2 - Fonction racine carrée.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{x} \xrightarrow[x \to a]{} \sqrt{a}$$

Proposition 3 - Fonction racine cubique.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt[3]{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} \xrightarrow[x \to a]{} \sqrt[3]{a}$$

Proposition 4 - Fonction exponentielle.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$e^x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad e^x \underset{x \to a}{\longrightarrow} e^a$$

Proposition 5 - Fonction logarithme népérien.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ln(a)$$

Remarques.

1. Nous nous ferons désormais un devoir de compléter les tableaux de variations par les limites.
   Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   et

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Opérations sur les limites.

Proposition 6 - Limites et additions.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $m,\ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $f + g$ en a par le tableau :

f \ g	ℓ	$+\infty$	$-\infty$.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Proposition 7 - Limites et produits.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $m,\ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $f \times g$ en a par le tableau :

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	?	?
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarques.

1. En choisissant pour f une fonction constante égale à α nous voyons que le précédent résultat nous permet d'étudier la limite de αg.

   En utilisant la précédente proposition concernant les sommes nous voyons que nous pouvons étudier la limite des fonctions polynomiales.

Proposition 8 - Limites et inverse.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $\ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $\frac{1}{f}$ en a par le tableau :

f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	?	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Où 0^+ symbolise le fait que f tend vers 0 mais que de plus f prend des valeurs positives au voisinage de a, tandis 0^- signifie que f tend vers 0 mais en prenant des valeurs négatives.

Remarques.

1. Si $\ell = 0$,alors $\frac{1}{f}$ a une limite infinie si f est de signe constant au voisinage de a et cette limite infinie est alors du signe de f au voisinage de a.

Corollaire 2 - Fonctions puissances.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{x^n} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corollaire 3 - Fonction exponentielle.

$$\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corollaire 4 - Fonction racine carrée.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Proposition 9 - Limites et produits.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $m,\ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $\frac{f}{g}$ en a par le tableau :

$f \backslash g$	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	?	?	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	?	?	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	?	$+\infty$	?	?

Remarques.

1. Il faudra surtout retenir les formes indéterminées qui sont les situations appelant une étude plus poussée dans les exercices. Schématiquement les formes indéterminées sont : $+\infty + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{\cdot}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

4 D'autres exemples de référence.

Proposition 10 - Fonctions polynomiales.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$.

La fonction polynomiale $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$ admet une limite en $\pm\infty$ et celle-ci est la même que celle de $a_n x^n$ en $\pm\infty$.

Remarques.

1. Pour exprimer la précédente proposition nous noterons

$$a_n x^n + \cdots + a_0 \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$$

et nous dirons que *la fonction $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$ équivaut à la fonction $x \mapsto a_n x^n$ en $\pm\infty$.*

Corollaire 5 - Fonctions rationnelles.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_n \neq 0$.

. $m \in \mathbb{N}^*$,

. $(b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $b_m \neq 0$.

La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$ admet une limite en $\pm\infty$ et celle-ci est la même que celle de $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ en $\pm\infty$.

Remarques.

1. Pour exprimer la précédente proposition nous noterons

$$\frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

ou, mieux encore,

$$\frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

et nous dirons que la fonction $x \mapsto \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0}$ équivaut à la fonction $x \mapsto \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ en $\pm\infty$.

5 Propriétés.

Proposition 11 - Unicité de la limite.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en a alors $\ell = \ell'$.

Proposition 12 - limite finie et fonction bornée.

Si $f$admet une limite finie en a alors f est borné au voisinage de a.

Proposition 13 - Comparaison de fonctions.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f, g, h : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications,

. I un voisinage de a.

(i)

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty.$$

(ii)

$$\begin{cases} g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty.$$

(iii)

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow \ell \leqslant \ell'.$$

(iv)

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow h(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Remarques.

1. Nous pourrons retenir le schéma mnémotechnique : si $f \leqslant g \leqslant h$ alors $\lim f \leqslant \lim g \leqslant \lim h$. Autrement dit on peut passer à la limite dans des inégalités larges.
2. En passant à la limite dans des inégalités strictes on obtient a priori des

inégalités larges : $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pourtant $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Proposition 14 - Croissances comparées.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Remarques.

1. Ce résultat permet parfois de lever l'indétermination pour les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$.

Proposition 15 - encore des croissances comparées.

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta} = 0$.

Corollaire 6 - croissances comparées.

Soient :

. P une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$,

. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

. $\beta \in \mathbb{R}_+^*$,

.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{P(x)} = +\infty.$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = 0.$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^{\alpha}}{P(x)} = 0.$

6 Limites et compositions.

Proposition 16 - Passage à la limite dans une fonction.

Soient :

. $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$,

. $\mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $b \in \mathscr{D}_g \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f\left(\mathscr{D}_f\right) \subset \mathscr{D}_g$.

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ \\ g(y) \xrightarrow[y \to b]{} \ell \end{cases} \Rightarrow g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Remarques.

1. On peut se représenter la chose comme un passage à la limite dans la fonction g :
$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{x \to a} g\left[f(x)\right] = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = g(b).$$

Remarques.

1. Ce résultat permet parfois de lever l'indétermination pour les fonctions dont l'expression fait intervenir des fonctions imbriquées (composition) les unes dans les autres.

Corollaire 7 - Application au cas des suites.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}$.

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right. \Rightarrow f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarques.

1. Nous retiendrons que, pour peut que cela ait du sens (notamment qu'il y a effectivement des limites), il est possible de passer à la limite de la suite dans la fonction.
   Schématiquement : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

7 Une astuce pour certaines compositions impliquant des racines carrées.

III Limites en un réel par valeurs supérieures et inférieures.

1 Définition.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathbb{R}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite à gauche en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in]-\infty, a[\cap I \cap \mathscr{D},\ f(x) \in J.$$

Remarques.

1. On définit de même la *limite à droite en a* : f admet ℓ pour limite à droite en a si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in]a, +\infty[\cap I,\ f(x) \in J.$$

2. Au lieu de dire « limite à droite » nous dirons parfois « *limite par valeurs supérieures* » et au lieu de « limite à gauche » nous dirons tout aussi bien « *limite par valeurs inférieures*.
3. Si f admet ℓ pour limite à droite en a on note :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$

ou

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} \ell$$

ou

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell.$$

4. Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ alors, pour décrire la situation graphique, nous dirons que $\mathscr{C}_f$, *la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en a*, ou encore que *$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $x = a$*.
5. Les résultats précédemment vus sur les limites restent valables pour ces limites à gauche et à droite.

2 Exemples de référence.

Proposition 17 - Fonction inverse en 0.

$$\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Proposition 18 - Fonction puissance d'un réel en 0.

$$x^a \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 19 - Fonctions puissances négatives.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impaire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est paire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors :

$$\frac{1}{x^a} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Proposition 20 - Fonction logarithme népérien en 0.

$$\ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad x^n \ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0.$$

Proposition 21 - Fonction tangente.

$$\tan(x) \underset{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} -\infty.$$

3 Une astuce pour certaines limites indéterminée en un réel.

4 Exercices.

IV Continuité : définition.

1 Définition.

Définition 3

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. a un point intérieur à $\mathscr{D}$.

Une application f est dite continue en $a \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Remarques.

1. Nous dirons que *f est continue sur $\mathscr{D}$* si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.
2. Cette définition ne permet pas de définir la continuité en a lorsque $\mathscr{D} = [a,b]$ ou]
3. Graphiquement une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative peut être tracée sans lever le stylo.
4. Comme la dérivation ou la croissance, la continuité est une propriété locale : il faut regarder ce qui se passe au voisinage d'un point.
5. Une fonction sera dite *discontinue* si et seulement si elle n'est pas continue.

Proposition 22 - Caractérisation de la continuité.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. a un point intérieur à $\mathscr{D}$.

f est continue en a si et seulement si f admet des limites réelles à droite et à gauche en a égales à $f(a)$.

Remarques.

1. Nous en déduisons en particulier par contraposition que : si f n'admet pas de limite à droite ou à gauche en a alors f n'est pas continue en a. C'est une méthode à retenir pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.
2.

Définition 4

Soient :

. a et b des réels tels que $a < b$,

. f une application définie sur $[a,b[$.

Nous dirons que f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} f(a)$.

Remarques.

1. Nous pourrons donc dire que f est continue sur $[a,b[$.
2. Nous aurions la même chose en b en considérant une limite par valeurs inférieures.

2 Les fonctions continues de référence.

Proposition 23

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

(i) La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
(ii) La fonction $x \mapsto x^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(iii) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
(iv) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(v) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
(vi) Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
(vii) La fonction tangente est continue sur son domaine de définition.

3 Opérations sur les fonctions continues.

Proposition 24 - opérations sur les fonctions continues.

Soient :
. I un intervalle ouvert,
. $a \in I$,
. f et g des fonctions continues en a,
. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\lambda f + g$ est continue en a.
(ii) $f \times g$ est continue en a.
(iii) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{1}{g}$ est continue en a.
(iv) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition 25 - Continuité et composition.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

4 Une condition suffisante de continuité.

Proposition 26 - condition suffisante de continuité.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Remarques.

1. La réciproque est fausse. C'est pour cela que l'on parle de condition suffisante : la continuité n'impose pas de façon nécessaire la dérivabilité de la fonction. Le contre exemple usuel est celui de la fonction valeur absolue en 0. Il y a le même phénomène avec la fonction racine cubique en 0.

Corollaire 8

(i) exp est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Toutes les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

(iii) Toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

V Suite image.

Proposition 27

(i) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et f est continue au voisinage de ℓ alors $(f(u_n))$ converge et $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

(ii) Si f est continue sur I , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$, $f(u_n) = u_{n+1}$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $f(\ell) = \ell$.

VI Fonctions prolongeables par continuité.

VII Continuité : théorème des valeurs intermédiaires.

1 Le théorème.

Théorème 1 - des valeurs intermédiaires.

L'image continue d'un intervalle I est un intervalle noté $f(I)$.
De plus l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Corollaire 9 - des valeurs intermédiaires.

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème 2 - continuité et extrema.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarques.

1. Autrement dit f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.
2. Ce résultat est un théorème d'existence. Comme tous les théorèmes d'existence il est très important.

2 Cas des fonctions monotones.

Proposition 28 - les différentes images continues d'intervalles.

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I. a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant les cas.

I	Croissante sur I, alors $f(I) =$	Décroissante sur I, alors $f(I) =$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

Remarques.

1. Là encore c'est un résultat qui est intuitif (quand on connaît le théorème des valeurs intermédiaires). Il faut savoir qu'il existe et être capable de retrouver la réponse si nécessaire.

3 Cas des fonctions strictement monotones.

Corollaire 10 - Unicité de l'antécédent.

Si f continue est strictement monotone sur $[a,b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Pour $k = 0$ alors il suffit de s'assurer que la fonction est continue, strictement monotone et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires pour affirmer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$.
2. On peut étendre le corollaire en travaillant avec des intervalles semi-ouverts ou ouverts ($]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$) a et b étant pris dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans ce cas on considère $\lim_a f$ et $\lim_b f$ à la place de $f(a)$ et $f(b)$. *Confer infra.*

Corollaire 11 - Théorème de la bijection.

Si f continue est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ alors f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$ (resp. $[f(b),f(a)]$).

Remarques.

1. Là encore il est possible de généraliser ce résultat à d'autre intervalles.

4 Exercices.

VIII Exercices.