Limite de fonctions et continuité.

I Voisinage.

II Limites.

1 Définition.

2 Exemples de référence.

3 Opérations sur les limites.

4 D'autres exemples de référence.

Exercice 1.

Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

Exercice 2.

Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x$.

b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^3 + 2x + 7}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 10x^2 + x}{x^{12} + 1}$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 - x^3 + x^6}{2x^4 + x^4 + x^7}$.

5 Propriétés.

Exercice 3.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^2 x - x^3\mathrm{e}^x$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^x}{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x^2}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{4\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}}$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^x}{x}$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{\mathrm{e}}$.

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x}{\mathrm{e}^x}$.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x-1)\mathrm{e}^x$.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + x + 3)\mathrm{e}^x$.

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - \mathrm{e}^x$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - 2\mathrm{e}^x$.

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x\mathrm{e}^x$.

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\mathrm{e}^x - x)\mathrm{e}^x$.

6 Limites et compositions.

Exercice 4.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3}$.

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1-0,5x}$.

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (5-x)^3$.

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{(x^2+x+1)^4}$.

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x-2}$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+x+1}$.

h) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{2}{x}}$.

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2-3e^{2x})^5$.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{4x^2+1}}$.

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3xe^{3x}$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^{2-x}$.

7 Une astuce pour certaines compositions impliquant des racines carrées.

Exercice 5.

Déterminez la limite en $\pm\infty$ de $f : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2-3x+1}$.

Exercice 6.

Déterminez la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$.

III Limites en un réel par valeurs supérieures et inférieures.

1 Définition.

2 Exemples de référence.

Exercice 7.

Exercices 54 et 55 page 180 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 8. ☢

Déterminez le domaine de définition de la fonction définie par $\varphi : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et justifiez que sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Justifiez que φ est dérivable sur $]-1;1[$ et calculez $\lim_{x\to-1} \varphi'(x)$, puis tracez la courbe représentative de φ en faisant apparaître toutes les informations précédentes.

3 Une astuce pour certaines limites indéterminée en un réel.

Exercice 9.

Déterminez les limites suivantes :

a) $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en $a = 0$.

b) $\dfrac{\cos(x) - 1}{x}$ en $a = 0$.

c) $\dfrac{\tan(x)}{x}$ en $a = 0$.

d) $\dfrac{\tan(x) - 1}{4x - \pi}$ en $a = \frac{\pi}{4}$.

4 Exercices.

Exercice 10.

Déterminez la limite en 2 de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$.

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{2x + 3}{4x + 3}.$$

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Construisez le tableau de variation de f.

IV Continuité : définition.

1 Définition.

Exercice 12.

Démontrez que $f : x \mapsto 2e^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue en 0.

Exercice 13.

Démontrez que $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 14.

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrez que f n'est pas continue en 0.

2 Les fonctions continues de référence.

3 Opérations sur les fonctions continues.

Exercice 15.

Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geqslant 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrer que f_a est continue et impaire.

Exercice 16.

Dans chacun des cas suivants étudiez le continuité de f en a.

1. $a = 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^2-7x+2}{x-2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = 5$.
2. $a = 1$ et f est définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$.
3. $a = 0$ et f est définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)-2\tan(x)}{x}$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $f(0) = -1$.

Exercice 17.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18.

Soient a et b deux réels, on donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax - 1 & ,\text{si } x \in]-\infty, -1[\\ 3x - 2 & ,\text{si } x \in]-1; 2[\\ b(x^2 - 5x + 6) & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}.$$

4 Une condition suffisante de continuité.

V Suite image.

Exercice 19.

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1;+\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).

VI Fonctions prolongeables par continuité.

Exercice 20.

Exercice 21.

Soit $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Déterminez le domaine de définition de f puis démontrez que f est prolongeable par continuité en 0.

VII Continuité : théorème des valeurs intermédiaires.

1 Le théorème.

2 Cas des fonctions monotones.

Exercice 22. ☢

Dressez le tableau de variation de $\varphi : t \mapsto \dfrac{1 + t\ln(t)}{2}$ et explicitez son intervalle image, puis vérifiez qu'il est stable par φ.

Correction de l'exercice 22

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
φ'	‖	$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$\frac{1-\mathrm{e}^{-1}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Cas des fonctions strictement monotones.

Exercice 23. ☢

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrez que la fonction $f : x \mapsto 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0; 1[$ et déterminez l'expression de sa fonction réciproque.

4 Exercices.

Exercice 24.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2; +\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (dans $[2; +\infty[$).

Exercice 25.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 1]$.

Exercice 26.

Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

Exercice 27.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à 0,1 près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 28.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 29.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à 0,1 près.
   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$
   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 30.

On veut résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,\pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à 0,1 près de α.

VIII Exercices.

Exercice 31. ☢

On souhaite déterminer par un sondage la proportion q de la population qui consomme de la drogue mais on sait que les sondés hésiterons à donner une réponse qui puissent les mettre en cause. On fixe alors $(p,N) \in]0;1[\times\mathbb{N}^*$ et on considère une urne contenant un grand nombre de boules indiscernables au toucher et sur chacune desquelles une phrase est inscrite :

— « Vous vous droguez », en proportion p,

— « Vous ne vous droguez pas en proportion $1-p$.

Un sondeur demande à N personnes de tirer au hasard une boule dans l'urne, de lire la question sans la montrer puis de remettre la boule dans l'urne, avant de dire au sondeur si la phrase est vraie ou fausse. on suppose que les sondés ne mentent pas, mais la réponse de chaque sondé (« vrai » ou « faux ») ne permet pas de savoir avec certitude s'il se drogue ou pas.

Soit $i \in [\![1,N]\!]$ le numéro d'ordre d'un sondé, on note A_i : « la boule porte la phrase affirmative », D_i :« Le sondé se drogue » et V_i : « la phrase lue par le sondé est vraie ».

1. Calculez la probabilité $\mathbb{P}(V_i)$ que la phrase lue soit vraie en fonction de p et q. Montrez qu'elle est non nulle puis calculer $\mathbb{P}(D_i|V_i)$.
2. Déterminez l'ensemble image de $[0;1]$ par la fonction $g : x \mapsto \frac{px}{px+(1-p)(1-x)}$. Déduisez-en une condition sur p pour avoir $\mathbb{P}(D_i|V_i) \leqslant 2\mathbb{P}(D_i)$ quelle que soit la proportion q.
3. Déterminez de même une condition sur p pour avoir $\mathbb{P}\left(D_i|\overline{V_i}\right) \leqslant 2\mathbb{P}(D_i)$ quelle que soit la proportion q.

Exercice 32. ☢

Dressez le tableau de variation et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 33.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x} + 10x - 3$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ et calculer $f'(0)$.
   En déduire que f' s'annule pour deux valeurs α et β de x telles que $\alpha < 0 < \beta$.
2. On se propose de calculer α et β. Pour cela on pose $t = \mathrm{e}^{x}$ (ou ce qui revient au même $x = \ln(t)$).
   (a) Montrez que si $f'(x) = 0$, alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.
   (b) Montrer que $t = 2$ est solution de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déterminer deux nombres réels a et b tels que $t^3 - 5t + 2 = (t-2)(t^2 + at + b)$.
   (c) En déduire les solutions de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$.
   (d) En déduire alors les valeurs de α et β.
3. (a) Vérifier que pour tout réel x non nul :
$$f(x) = x\left(h\frac{4}{x\mathrm{e}^{x}} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x}\right).$$
   En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités 2 cm).