Limite de fonctions et continuité.

I Voisinage.

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Ainsi a peut être un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $a \in \mathbb{R}$ nous appellerons *voisinage ouvert de a* tout intervalle ouvert contenant a.

Nous appellerons *voisinage ouvert de $+\infty$* tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Nous appellerons *voisinage ouvert de $-\infty$* tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où $A \in \mathbb{R}$.

Exemples.

1. $]-1{,}2; 0{,}5[$ est un voisinage ouvert de 0 par contre $]2; 4[$ n'en n'est pas un.
2. $]1; 4[$ est un voisinage ouvert de π.
3. $]2; 3[$ est un voisinage ouvert de e.
4. $]-\infty, 4[$ est un voisinage ouvert de $-\infty$.
5. $\mathbb{R}$ est un voisinage ouvert de n'importe quel nombre, de $+\infty$ et de $-\infty$.

Dans cette leçon nous nous intéressons à ce qui se passe pour $f(x)$ lorsque x se rapproche de valeurs particulières dans l'ensemble de définition ou aux bornes de l'ensemble de définition. Le fait de travailler avec des voisinages signifie pouvoir choisir un ensemble qui nous facilite les choses (ne contenant pas de valeurs interdite, sur lequel la fonction est monotone, ...) : nous intéressons aux propriétés asymptotiques.

II Limites.

Une approche intuitive des situations et questions que nous allons rencontrer : fichier Geogebra.

1 Définition.

Définition 1

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \in J.$$

Remarques.

1. Une application est une fonction dont le domaine de définition coïncide avec l'ensemble de départ.
2. Si f admet ℓ pour limite en a alors nous noterons

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

ou

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

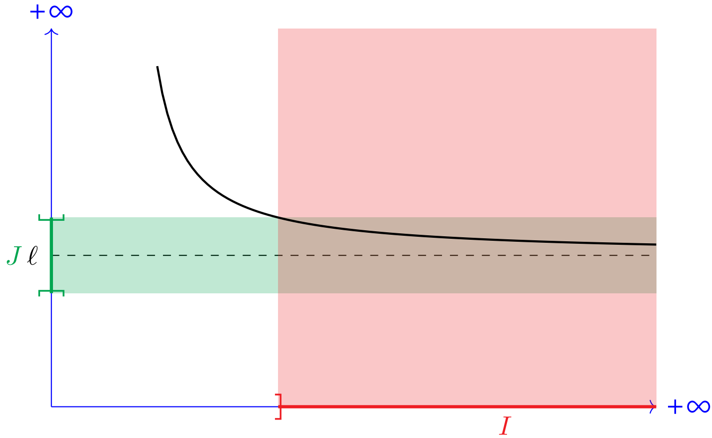
ou encore

$$\lim_{a} f = \ell.$$

3. Voici une visualisation de cette définition avec Geogebra.

Exemples.

1. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...

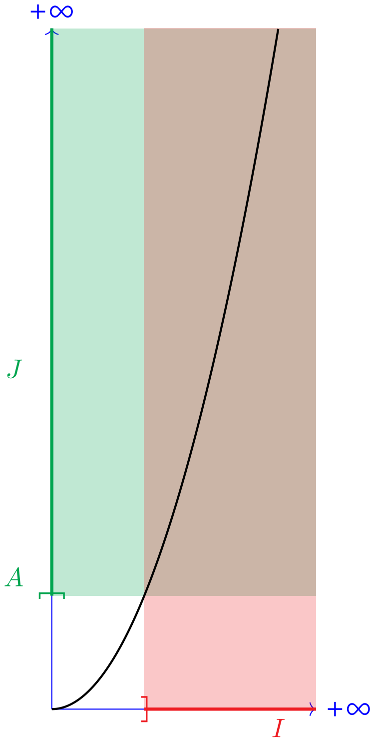


... se rapproche de $\ell \in \mathbb{R}$.

Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I$, $f(x) \in J$.

Nous dirons que *la droite $y = \ell$ est asymptote (horizontale) à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$*.

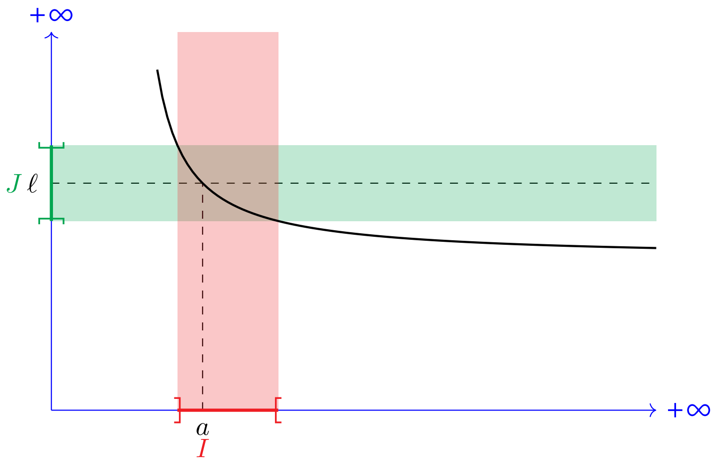
2. Au voisinage de $a = +\infty$, $f(x)$ semble...



... augmenter sans limitation, $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]A, +\infty[$, de $+\infty$, il existe un voisinage I, de $+\infty$, tel que : $\forall x \in I$, $f(x) \in J$.

3. Au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ semble...



... se rapprocher de $\ell \in \mathbb{R}$.
Quel que soit le voisinage ouvert, $J =]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$, de ℓ, il existe un voisinage I, de a, tel que : $\forall x \in I$, $f(x) \in J$.

2 Exemples de référence.

Les résultats qui suivent sont à connaître par cœur. Ils constituent un alphabet avec lequel nous allons composer des mots.

Proposition 1 - Fonctions puissances.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $a \in \mathbb{R}$,

. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) $x^n \underset{x \to a}{\longrightarrow} a^n$.

(ii) $x^n \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iii) Si n est pair alors : $x^n \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(iv) Si n est impair alors : $x^n \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(v) Si $a > 0$ alors : $x^\alpha \underset{x \to a}{\longrightarrow} a^\alpha$.

(vi) $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Démonstration

(i)

(ii) Se déduit de (ii) par parité de $x \mapsto x^n$.

(iii) Idem.

■

Corollaire 1

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$|x| \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad |x| \underset{x\to a}{\longrightarrow} |a|.$$

Proposition 2 - Fonction racine carrée.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt{x} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sqrt{a}$$

Proposition 3 - Fonction racine cubique.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt[3]{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{x} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sqrt[3]{a}$$

Proposition 4 - Fonction exponentielle.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^x \underset{x\to a}{\longrightarrow} \mathrm{e}^a$$

Proposition 5 - Fonction logarithme népérien.

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ln(a)$$

Remarques.

1. Nous nous ferons désormais un devoir de compléter les tableaux de variations par les limites.
   Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   et

x	$-\infty$		$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Opérations sur les limites.

Proposition 6 - Limites et additions.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $m,\ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $f + g$ en a par le tableau :

f \ g	ℓ	$+\infty$	$-\infty$.
m	$m+\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**
$-\infty$	$-\infty$	**?**	$-\infty$

Exemples.

1. $x^4 + \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

2. Nous ne pouvons pas donner la limite de $x \mapsto e^x - \ln(x)$ en $+\infty$ car il s'agit d'une forme indéterminée $(+\infty - (+\infty))$.

Proposition 7 - Limites et produits.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $m, \ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $f \times g$ en a par le tableau :

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$m = 0$	0	0	0	?	?
$m < 0$	$m\ell$	0	$m\ell$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarques.

1. En choisissant pour f une fonction constante égale à α nous voyons que le précédent résultat nous permet d'étudier la limite de αg.
   En utilisant la précédente proposition concernant les sommes nous voyons que nous pouvons étudier la limite des fonctions polynomiales.

Exemples.

1. La recherche de limite de $f(x) = \frac{1}{x} \times e^x$ en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée $(0 \times (+\infty))$.
2. Recherchons l'éventuelle limite de $x \mapsto x^3 \ln(x)$ en $+\infty$.

$$\begin{cases} \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \\ x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases},$$

donc

$$\boxed{x^3 \ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

3. Recherchons l'éventuelle limite de $x \mapsto 4x^2 - 3x + 1$ en $-\infty$.

   Par combinaison linéaire $(4 \times (+\infty) - 3 \times (-\infty) + 1)$:

$$\boxed{4x^2 - 3x + 1 \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

4. La recherche de limite de $x \mapsto x^2 - x$ en $+\infty$ conduit à une forme indéterminée $(+\infty - (\infty))$: nous ne pouvons conclure quant à la limite de la fonction en $+\infty$.

Proposition 8 - Limites et inverse.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $\ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $\frac{1}{f}$ en a par le tableau :

f	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	?	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Où 0^+ symbolise le fait que f tend vers 0 mais que de plus f prend des valeurs positives au voisinage de a, tandis 0^- signifie que f tend vers 0 mais en prenant des valeurs négatives.

Remarques.

1. Si $\ell = 0$,alors $\frac{1}{f}$ a une limite infinie si f est de signe constant au voisinage de a et cette limite infinie est alors du signe de f au voisinage de a.

Nous en déduisons de nouvelles limites de fonctions de référence.

Corollaire 2 - Fonctions puissances.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{x^n} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corollaire 3 - Fonction exponentielle.

$$\mathrm{e}^{-x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Corollaire 4 - Fonction racine carrée.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exemples.

1. $\frac{1}{\sqrt{x}+3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$
2. $\frac{2}{x+1} + \frac{1}{\mathrm{e}^x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$
3. $x^3 h \frac{4}{x^2+x2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$

En combinant inverse et produit nous obtenons de nouveaux résultats sur les limites de fonctions.

Proposition 9 - Limites et produits.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

. $m, \ell \in \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications.

On peut synthétiser les possibilités de limites de la fonction $\frac{f}{g}$ en a par le tableau :

f \ g	$\ell > 0$	$\ell = 0^+$	$\ell = 0^-$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$m > 0$	$\frac{m}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$m = 0$	0	?	?	0	0	0
$m < 0$	$\frac{m}{\ell}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{m}{\ell}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	?	?	$-\infty$	?	?
$-\infty$	$-\infty$	?	?	$+\infty$	?	?

Remarques.

1. Il faudra surtout retenir les formes indéterminées qui sont les situations appelant une étude plus poussée dans les exercices. Schématiquement les formes indéterminées sont : $+\infty + (-\infty)$, $0 \times \infty$, $\frac{\cdot}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

4 D'autres exemples de référence.

Un polynôme est une expression algébrique formée d'une somme de monôme, c'est-à-dire d'expression ax^n (avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$). Le degré du monôme ax^n est la puissance n.

Dans des expressions polynomiales la factorisation par le monôme dominant permet de lever les indéterminations (de la forme $+\infty - (+\infty)$) en $\pm\infty$.

Exemples.

1. On cherche à déterminer la limite éventuelle de $P(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5x + 1$ en $+\infty$.

   On essaye d'abord de passer à la limite directement : c'est une combinaison linéaire de fonctions de référence est l'on obtient schématiquement : $-2 \times (+\infty) + 4 \times (+\infty) + 5 \times (+\infty) + 1$.

   Il s'agit d'une forme indéterminée $(+\infty + (-\infty))$.

   Alors nous factorisons par le monôme dominant $-2x^3$.

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^3\left(\frac{-2x^3}{-2x^3} + \frac{4x^2}{-2x^3} + \frac{5x}{-2x^3} + \frac{1}{-2x^3}\right) \\ &= -2x^3\left(1 - 2 \times \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^3}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{cases} 1 - 2 \times \frac{1}{x} - \frac{2}{5} \times \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{x^3} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \\ \\ -2x^3 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty \end{cases}$$

donc, par produit : $P(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Proposition 10 - Fonctions polynomiales.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $a_n \neq 0$.

La fonction polynomiale $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$ admet une limite en $\pm\infty$ et celle-ci est la même que celle de $a_n x^n$ en $\pm\infty$.

Remarques.

1. Pour exprimer la précédente proposition nous noterons

$$a_n x^n + \cdots + a_0 \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$$

et nous dirons que *la fonction $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$ équivaut à la fonction $x \mapsto a_n x^n$ en $\pm\infty$.*

Exercice 1.

Soit f une fonction polynomiale de degré 3. Étudiez les limites de f à l'infini.

Corollaire 5 - Fonctions rationnelles.

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $a_n \neq 0$.

. $m \in \mathbb{N}^*$,

. $(b_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ avec $b_m \neq 0$.

La fonction rationnelle $x \mapsto \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$ admet une limite en $\pm\infty$ et celle-ci est la même que celle de $\frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ en $\pm\infty$.

Démonstration

Découle du résultat précédent appliqué aux numérateurs et dénominateurs qui sont polynomiaux.

■

Remarques.

1. Pour exprimer la précédente proposition nous noterons

$$\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

ou, mieux encore,

$$\frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

et nous dirons que la fonction $x \mapsto \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_m x^m + \dots + b_0}$ équivaut à la fonction $x \mapsto \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$ en $\pm\infty$.

Exercice 2.

Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants.

a) $f : x \mapsto -2x^7 + 4x^3 + x$.

b) $f : x \mapsto x^3 + 4x^2 - x^4$.

c) $f : x \mapsto \dfrac{2x^4 - 3x^3 + x^2 + x + 1}{4x^3 + 2x + 7}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{2x^3 + 10x^2 + x}{x^{12} + 1}$.

e) $f : x \mapsto \dfrac{7x^{32} - 13x^{17} + x + 2}{-3x^{32} + x + \pi}$.

f) $f : x \mapsto \dfrac{2x^5 - x^3 + x^6}{2x^4 + x^4 + x^7}$.

5 Propriétés.

Proposition 11 - Unicité de la limite.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Si f admet ℓ et ℓ' pour limites en a alors $\ell = \ell'$.

Démonstration

Comme pour les limites de suites un raisonnement par l'absurde convient. ■

Proposition 12 - limite finie et fonction bornée.

Si $f$admet une limite finie en a alors f est borné au voisinage de a.

Proposition 13 - Comparaison de fonctions.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell, \ell' \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f, g, h : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ des applications,

. I un voisinage de a.

(i)

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty.$$

(ii)

$$\begin{cases} g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} -\infty.$$

(iii)

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell' \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow \ell \leqslant \ell'.$$

(iv)

$$\begin{cases} f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \\ g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \\ \forall x \in I,\ f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \end{cases} \Rightarrow h(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarques.

1. Nous pourrons retenir le schéma mnémotechnique : si $f \leqslant g \leqslant h$ alors $\lim f \leqslant \lim g \leqslant \lim h$. Autrement dit on peut passer à la limite dans des inégalités larges.
2. En passant à la limite dans des inégalités strictes on obtient a priori des

inégalités larges : $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et pourtant $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exemples.

1. La recherche de la limite de $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ en $+\infty$ relève d'une forme indéterminée, mais de
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2} \\ \frac{x}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$$
nous déduisons : $\frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Limite en $\pm$ de $g : x \mapsto \frac{3\cos(x)}{x}$.

Proposition 14 - Croissances comparées.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = +\infty$.

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$.

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$.

Démonstration

(i) Nous avons démontré que $\frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Or
$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n}\left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$$
donc par composition $\frac{e^x}{x^n} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(ii) Découle de (i) par passage à l'inverse et composition.

(iii) Il s'agit du taux d'accroissement de exponentielle entre 0 et $0+x$. Le résultat découle donc de la dérivabilité et du calcul de $\exp'(0)$.

(iv) D'après (i), par produit, $\sqrt{x}\frac{e^x}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

(v) $\frac{\ln(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par composition avec la fonction exponentielle, d'après (i).

(vi) C'est le taux de variation de ln en 1.

(vii) Comme pour (iii).

■

Remarques.

1. Ce résultat permet parfois de lever l'indétermination pour les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$.

Exercice 3.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^{x} + 2e^{x} - 1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - e^{2}x - x^{3}e^{x}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{4e^{x}}{x}$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{e^{x}}{2x^{2}}$.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{4e^{x}}{\sqrt{x}}$.

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}e^{x}}{x}$.

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{e}$.

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5-3x}{e^{x}}$.

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} (5x-1)e^{x}$.

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^{2}+x+3)e^{x}$.

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - e^{x}$.

l) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^{2} - 2e^{x}$.

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2} - xe^{x}$.

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^{x}-x)e^{x}$.

Proposition 15 - encore des croissances comparées.

Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty$.

(ii) $\lim\limits_{x\to-\infty} |x|^{\beta}e^{\alpha x} = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0$.

Corollaire 6 - croissances comparées.

Soient :

. P une fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$,

. $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

. $\beta \in \mathbb{R}_+^*$,

.

(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{P(x)} = +\infty.$

(ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)\mathrm{e}^{\alpha x} = 0.$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln(x))^{\alpha}}{P(x)} = 0.$

6 Limites et compositions.

Proposition 16 - Passage à la limite dans une fonction.

Soient :

. $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$,

. $\mathscr{D}_g \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D}_f \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $b \in \mathscr{D}_g \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ et $g : \mathscr{D}_g \to \mathbb{R}$ des applications telles que $f\left(\mathscr{D}_f\right) \subset \mathscr{D}_g$.

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ \\ g(y) \xrightarrow[y \to b]{} \ell \end{cases} \Rightarrow g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.$$

Remarques.

1. On peut se représenter la chose comme un passage à la limite dans la fonction g :

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \lim_{x \to a} g\left[f(x)\right] = g\left[\lim_{x \to a} f(x)\right] = g(b).$$

Exemples.

1. $h : x \mapsto e^{-x+1}$ n'est pas une fonction de référence, mais n'est pas non plus une somme, ou un produit, ou un quotient, de fonctions de références. Nous étions pour l'instant impuissant à traiter cette situation.
   Mais en notant $f : x \mapsto -x+1$ et $g : x \mapsto e^x$ nous remarquons que $h = g \circ f$ où g et f sont des fonctions de références (ou au moins des sommes, produits quotients de fonctions de référence).

   Étudions la limite de h en $+\infty$.

$$\left\{\begin{array}{l} -x+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty \\ \\ e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array}\right. \Rightarrow e^{-x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} h = 0.}$$

Remarques.

1. Ce résultat permet parfois de lever l'indétermination pour les fonctions dont l'expression fait intervenir des fonctions imbriquées (composition) les unes dans les autres.

Exercice 4.

Déterminez les limites suivantes.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+3}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} e^{1-0,5x}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} (5-x)^3$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^4}$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^{3x-2}$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2+x+e^{-x}}$.

g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+x+1}$.

h) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} e^{\frac{2}{x}}$.

i) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (2-3e^{2x})^5$.

j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2-1}{4x^2+1}}$.

k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 3xe^{3x}$.

l) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2-x)e^{2-x}$.

Corollaire 7 - Application au cas des suites.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathscr{D} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application,

. $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{D}$.

$$\begin{cases} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \\ \\ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \end{cases} \Rightarrow f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

Remarques.

1. Nous retiendrons que, pour peut que cela ait du sens (notamment qu'il y a effectivement des limites), il est possible de passer à la limite de la suite dans la fonction.
   Schématiquement : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right)$.

7 Une astuce pour certaines compositions impliquant des racines carrées.

Exercice 5.
Déterminez la limite en $\pm\infty$ de $f : x \mapsto 2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 1}$.

Exercice 6.
Déterminez la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$.

III Limites en un réel par valeurs supérieures et inférieures.

Nous avons été confrontés à la forme indéterminée $\frac{\cdot}{0}$. Nous allons voir une approche permettant de lever parfois cette indétermination.

Un exemple typique de la situation qui nous intéresse est celui de la fonction inverse en 0.

Explorons cette nouvelle situation avec Geogebra.

1 Définition.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $a \in \mathbb{R}$.

. $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une application.

Nous dirons que *f admet ℓ pour limite à gauche en a* si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :

$$\forall x \in]-\infty, a[\cap I \cap \mathscr{D},\ f(x) \in J.$$

Remarques.

1. On définit de même la *limite à droite en a* : f admet ℓ pour limite à droite en a si et seulement si, quelque soit le voisinage ouvert J de ℓ, il existe un voisinage ouvert I de a tel que :
$$\forall x \in]a, +\infty[\cap I,\ f(x) \in J.$$
2. Au lieu de dire « limite à droite » nous dirons parfois « *limite par valeurs supérieures* » et au lieu de « limite à gauche » nous dirons tout aussi bien « *limite par valeurs inférieures*.
3. Si f admet ℓ pour limite à droite en a on note :
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$$
ou
$$f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} \ell$$
ou
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \ell.$$
4. Si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$ alors, pour décrire la situation graphique, nous dirons que $\mathscr{C}_f$, *la courbe représentative de f admet une asymptote verticale en a*, ou encore que *$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $x = a$*.
5. Les résultats précédemment vus sur les limites restent valables pour ces limites à gauche et à droite.

2 Exemples de référence.

Proposition 17 - Fonction inverse en 0.

$$\frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Démonstration

(i)

(ii) La seconde limite découle de la première par imparité de la fonction inverse.

■

Proposition 18 - Fonction puissance d'un réel en 0.

$$x^a \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0.$$

Proposition 19 - Fonctions puissances négatives.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impaire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Si $n \in \mathbb{N}^*$ est paire alors :

$$\frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^n} \underset{\substack{x\to 0\\ x<0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Si $a \in \mathbb{R}_+^*$ alors :

$$\frac{1}{x^a} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty.$$

Proposition 20 - Fonction logarithme népérien en 0.

$$\ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} -\infty \quad \text{et} \quad x^n \ln(x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\beta \left|\ln(x)\right|^\alpha = 0.$$

Proposition 21 - Fonction tangente.

$$\tan(x) \underset{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{\substack{x \to -\frac{\pi}{2} \\ x > -\frac{\pi}{2}}}{\longrightarrow} -\infty.$$

Démonstration

(i)

(ii) La seconde limite découle de la première par imparité de la fonction inverse.

■

Exercice 7.

Exercices 54 et 55 page 180 du manuel Lelivrescolaire.

Exercice 8. ☢

Déterminez le domaine de définition de la fonction définie par $\varphi : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et justifiez que sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Justifiez que φ est dérivable sur $]-1;1[$ et calculez $\lim_{x\to -1} \varphi'(x)$, puis tracez la courbe représentative de φ en faisant apparaître toutes les informations précédentes.

3 Une astuce pour certaines limites indéterminée en un réel.

Il est possible parfois d'identifier une taux de variation d'une fonction dérivable : si f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ alors $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \underset{x\to a}{\longrightarrow} f'(a)$.

Exemples.

1. Nous avions déjà indiqué dans la proposition sur les comparaisons de fonctions que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1.$.

Exercice 9.

Déterminez les limites suivantes :

a) $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en $a = 0$.

b) $\dfrac{\cos(x)-1}{x}$ en $a = 0$.

c) $\dfrac{\tan(x)}{x}$ en $a = 0$.

d) $\dfrac{\tan(x)-1}{4x-\pi}$ en $a = \frac{\pi}{4}$.

4 Exercices.

Exercice 10.

Déterminez la limite en 2 de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$.

Exercice 11.

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$ par

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+3}.$$

1. Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Construisez le tableau de variation de f.

IV Continuité : définition.

1 Définition.

Pour des raisons de cohérence des définitions nous aurons besoin de pouvoir dire qu'un nombre a n'est pas sur une borne de l'ensemble $\mathscr{D}$. Pour cela nous dirons que le nombre a est *intérieur à $\mathscr{D}$* s'il existe un voisinage ouvert de a inclus dans $\mathscr{D}$.

Définition 3

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. a un point intérieur à $\mathscr{D}$.

Une application f est dite continue en $a \in \mathscr{D}$ si et seulement si $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

Remarques.

1. Nous dirons que *f est continue sur $\mathscr{D}$* si et seulement si f est continue en tout point de $\mathscr{D}$.
2. Cette définition ne permet pas de définir la continuité en a lorsque $\mathscr{D} = [a,b]$ ou]
3. Graphiquement une fonction est continue sur un intervalle si sa courbe représentative peut être tracée sans lever le stylo.
4. Comme la dérivation ou la croissance, la continuité est une propriété locale : il faut regarder ce qui se passe au voisinage d'un point.

5. Une fonction sera dite *discontinue* si et seulement si elle n'est pas continue.

Exemples.

1.
2.
3. La fonction partie entière n'est continue en aucun point de $\mathbb{Z}$.
4. Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}$.
5. La fonction inverse n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais elle est continue sur son domaine de définition $\mathbb{R}^*$.

Proposition 22 - Caractérisation de la continuité.

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. a un point intérieur à $\mathscr{D}$.

f est continue en a si et seulement si f admet des limites réelles à droite et à gauche en a égales à $f(a)$.

Remarques.

1. Nous en déduisons en particulier par contraposition que : si f n'admet pas de limite à droite ou à gauche en a alors f n'est pas continue en a. C'est une méthode à retenir pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.
2.

Exercice 12.

Démontrez que $f : x \mapsto 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ est continue en 0.

Exercice 13.

Démontrez que $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ n'est pas continue en 0.

Exercice 14.

Soit $f : x \mapsto \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrez que f n'est pas continue en 0.

Notre définition de la continuité nécessite de regarder un voisinage autour de a. Ce n'est pas toujours possible : $g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ est continue sur $]0;1[$ mais nous ne pouvons pas dire si elle continue en 0.

Pourtant la fonction carré étant continue sur $\mathbb{R}$ il serait cohérent que nous puisions dire que g est continue en 0.

Définition 4

Soient :

. a et b des réels tels que $a < b$,

. f une application définie sur $[a,b[$.

Nous dirons que f est continue en a si et seulement si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x > a}}{\longrightarrow} f(a)$.

Remarques.

1. Nous pourrons donc dire que f est continue sur $[a,b[$.
2. Nous aurions la même chose en b en considérant une limite par valeurs inférieures.

Exemples.

1. La fonction racine carrée est continue en 0.

2 Les fonctions continues de référence.

Proposition 23

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$.

(i) La fonction $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction $x \mapsto x^a$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iii) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.

(iv) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(v) La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(vi) Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

(vii) La fonction tangente est continue sur son domaine de définition.

3 Opérations sur les fonctions continues.

Proposition 24 - opérations sur les fonctions continues.

Soient :

. I un intervalle ouvert,

. $a \in I$,

. f et g des fonctions continues en a,

. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(i) $\lambda f + g$ est continue en a.

(ii) $f \times g$ est continue en a.

(iii) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{1}{g}$ est continue en a.

(iv) Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.

Proposition 25 - Continuité et composition.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Exercice 15. ☢

Soit a un réel strictement positif et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(x) = \begin{cases} x^a & \text{si } x \geqslant 0 \\ -|x|^a & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Montrer que f_a est continue et impaire.

Exercice 16. ⚽

Dans chacun des cas suivants étudiez le continuité de f en a.

1. $a = 2$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^2-7x+2}{x-2}$ pour $x \neq 2$ et $f(2) = 5$.
2. $a = 1$ et f est définie sur $[-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{\sqrt{4x+5}-3}{x-1}$ pour $x \neq 1$ et $f(1) = \frac{1}{3}$.
3. $a = 0$ et f est définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)-2\tan(x)}{x}$ pour $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $f(0) = -1$.

Exercice 17. ⚽

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x}$ pour $x \neq -2$ et $f(-2) = 0$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 18. ⚽

Soient a et b deux réels, on donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax-1 & ,\text{si } x\in]-\infty,-1[\\ 3x-2 & ,\text{si } x\in]-1;2[\\ b(x^2-5x+6) & \text{si } x\in [2,+\infty[\end{cases}.$$

4 Une condition suffisante de continuité.

Proposition 26 - condition suffisante de continuité.

Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

Démonstration

■

Remarques.

1. La réciproque est fausse. C'est pour cela que l'on parle de condition suffisante : la continuité n'impose pas de façon nécessaire la dérivabilité de la fonction. Le contre exemple usuel est celui de la fonction valeur absolue en 0. Il y a le même phénomène avec la fonction racine cubique en 0.

Corollaire 8

(i) exp est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Toutes les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.

(iii) Toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

V Suite image.

Proposition 27

(i) Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et f est continue au voisinage de ℓ alors $(f(u_n))$ converge et $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

(ii) Si f est continue sur I , pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in I$, $f(u_n)=u_{n+1}$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ alors $f(\ell)=\ell$.

Exercice 19.

Soient (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n où f est la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Justifiez que (u_n) est bien définie.
2. Étudiez les variations de f sur $[1;+\infty[$.
3. Montrez que la suite (u_n) est convergente.
4. Déterminez la limite de (u_n).

VI Fonctions prolongeables par continuité.

La fonction $f : x \mapsto x\ln(x)$ n'est pas définie en zéro mais nous savons que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x) = 0$. Autrement dit par passage à la limite par valeur supérieures nous obtenons une limite. Nous dirons que f est *prolongeable par continuité en* 0 et alors $f(0) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2\ln(x) = 0$.

Exercice 20.

Exercice 21.

Soit $f : x \mapsto 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$. Déterminez le domaine de définition de f puis démontrez que f est prolongeable par continuité en 0.

VII Continuité : théorème des valeurs intermédiaires.

1 Le théorème.

Théorème 1 - des valeurs intermédiaires.

L'image continue d'un intervalle I est un intervalle noté $f(I)$.
De plus l'image continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné.

Corollaire 9 - des valeurs intermédiaires.

Si f est continue sur le segment $[a,b]$ alors f atteint toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Théorème 2 - continuité et extrema.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée et atteint ses bornes.

Remarques.

1. Autrement dit f admet un maximum et un minimum sur $[a,b]$.
2. Ce résultat est un théorème d'existence. Comme tous les théorèmes d'existence il est très important.

2 Cas des fonctions monotones.

Proposition 28 - les différentes images continues d'intervalles.

Soit f une fonction continue et monotone sur un intervalle I. a et b sont dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ suivant les cas.

I	Croissante sur I, alors $f(I) =$	Décroissante sur I, alors $f(I) =$
$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$	$[f(b),f(a)]$
$[a,b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x),f(a)\right]$
$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x),f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$
$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)\right[$

Remarques.

1. Là encore c'est un résultat qui est intuitif (quand on connaît le théorème des valeurs intermédiaires). Il faut savoir qu'il existe et être capable de retrouver la réponse si nécessaire.

Exercice 22. ☢

Dressez le tableau de variation de $\varphi : t \mapsto \dfrac{1+t\ln(t)}{2}$ et explicitez son intervalle image, puis vérifiez qu'il est stable par φ.

Correction de l'exercice 22

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^*$.

x	0		e^{-1}		$+\infty$
φ'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	$\frac{1-e^{-1}}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

3 Cas des fonctions strictement monotones.

Corollaire 10 - Unicité de l'antécédent.

Si f continue est strictement monotone sur $[a,b]$ alors pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = k$.

Remarques.

1. Pour $k = 0$ alors il suffit de s'assurer que la fonction est continue, strictement monotone et que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires pour affirmer l'existence d'une solution à l'équation $f(x) = 0$.
2. On peut étendre le corollaire en travaillant avec des intervalles semi-ouverts ou ouverts ($]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$) a et b étant pris dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Dans ce cas on considère $\lim_a f$ et $\lim_b f$ à la place de $f(a)$ et $f(b)$. *Confer infra.*

Le résultat précédent montre qu'à chaque image par une fonction continue strictement monotone correspond un unique antécédent. Ce lien biunivoque nous montre l'existence d'une bijection.

Corollaire 11 - Théorème de la bijection.

Si f continue est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[a,b]$ alors f réalise une bijection de $[a,b]$ sur $[f(a),f(b)]$ (resp. $[f(b),f(a)]$).

Remarques.

1. Là encore il est possible de généraliser ce résultat à d'autre intervalles.

Exemples.

1. La fonction exponentielle réalise une bijection dont la réciproque est la fonction logarithme népérien.
2. La fonction carré réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ dont la réciproque est racine carrée.
3. la fonction cube réalise une bijection sur $\mathbb{R}$ dont la réciproque est la fonction racine cubique.
4. La fonction arctan est la fonction réciproque de la fonction $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.

Exercice 23. ☢

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrez que la fonction $f : x \mapsto 1 - e^{-\lambda x}$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0; 1[$ et déterminez l'expression de sa fonction réciproque.

4 Exercices.

Exercice 24. ☯

Soit $f : x \mapsto x^3 - 6x + 1$ une fonction définie sur $[-2; +\infty[$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution (dans $[2; +\infty[$).

Exercice 25. ☯

Soit $f : x \mapsto x^3 - 8x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 1]$.

Exercice 26. ☯

Soit $f : x \mapsto 4x^5 + 2x - 2$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrez que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution que nous noterons α.
2. Déterminez un encadrement de α à 10^{-2}.

Exercice 27.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

1. Étudiez les variations de g.
2. Montrez que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique solution α. Donnez un encadrement de α à 0,1 près.
3. Déterminez le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}.$$

   (a) Calculez $f'(x)$ puis exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

   (b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 28.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$.

1. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 29.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 1.$$

1. Calculez pour tout réel x, $f'(x)$ et $f''(x)$.
2. Déterminez le signe de $f''(x)$ puis dressez le tableau de variation de f'.
3. (a) Montrez que l'équation $f'(x) = 0$ possède une unique solution α sur $\mathbb{R}$ donc on donnera en encadrement à 0,1 près.

   (b) Déduisez-en le signe de f' sur $\mathbb{R}$

   (c) Dressez le tableau de variation de f.

Exercice 30.

On veut résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation : $3x - 2\cos(x) - 2 = 0$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $f(x) = 3x - 2\cos(x) - 2$. Étudiez les variations de f.
2. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,\pi]$. Donner à la calculatrice un encadrement à 0,1 près de α.

VIII Exercices.

Exercice 31. ☢

On souhaite déterminer par un sondage la proportion q de la population qui consomme de la drogue mais on sait que les sondés hésiterons à donner une réponse qui puissent les mettre en cause. On fixe alors $(p,N) \in]0;1[\times\mathbb{N}^*$ et on considère une urne contenant un grand nombre de boules indiscernables au toucher et sur chacune desquelles une phrase est inscrite :

- « Vous vous droguez », en proportion p,
- « Vous ne vous droguez pas en proportion $1-p$.

Un sondeur demande à N personnes de tirer au hasard une boule dans l'urne, de lire la question sans la montrer puis de remettre la boule dans l'urne, avant de dire au sondeur si la phrase est vraie ou fausse. on suppose que les sondés ne mentent pas, mais la réponse de chaque sondé (« vrai » ou « faux ») ne permet pas de savoir avec certitude s'il se drogue ou pas.

Soit $i \in [\![1,N]\!]$ le numéro d'ordre d'un sondé, on note A_i : « la boule porte la phrase affirmative », D_i :« Le sondé se drogue » et V_i : « la phrase lue par le sondé est vraie ».

1. Calculez la probabilité $\mathbb{P}(V_i)$ que la phrase lue soit vraie en fonction de p et q. Montrez qu'elle est non nulle puis calculer $\mathbb{P}(D_i|V_i)$.
2. Déterminez l'ensemble image de $[0;1]$ par la fonction $g : x \mapsto \frac{px}{px+(1-p)(1-x)}$. Déduisez-en une condition sur p pour avoir $\mathbb{P}(D_i|V_i) \leqslant 2\mathbb{P}(D_i)$ quelle que soit la proportion q.
3. Déterminez de même une condition sur p pour avoir $\mathbb{P}\left(D_i|\overline{V_i}\right) \leqslant 2\mathbb{P}(D_i)$ quelle que soit la proportion q.

Exercice 32. ☢

Dressez le tableau de variation et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x} - \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 33.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{2x} + 10x - 3$.

1. (a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   Étudier le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ et calculer $f'(0)$.
   En déduire que f' s'annule pour deux valeurs α et β de x telles que $\alpha < 0 < \beta$.
2. On se propose de calculer α et β. Pour cela on pose $t = \mathrm{e}^{x}$ (ou ce qui revient au même $x = \ln(t)$).
   (a) Montrez que si $f'(x) = 0$, alors $t^3 - 5t + 2 = 0$.
   (b) Montrer que $t = 2$ est solution de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$ et déterminer deux nombres réels a et b tels que $t^3 - 5t + 2 = (t-2)(t^2 + at + b)$.
   (c) En déduire les solutions de l'équation $t^3 - 5t + 2 = 0$.
   (d) En déduire alors les valeurs de α et β.
3. (a) Vérifier que pour tout réel x non nul :
   $$f(x) = x\left(h\frac{4}{x\mathrm{e}^{x}} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} + 10 - \frac{3}{x}\right).$$
   En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.
4. Construire la représentation graphique $(\mathscr{C})$ de f dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités 2 cm).