Fonctions de référence.

I La notion de fonction.

1 Des liens.

Une fonction f indique des liens entre des nombres. Par exemple pour indiquer que f relie le nombre 2 au nombre 3 nous écrirons :

$$f(2) = 3.$$

Nous dirons alors que 2 est *un antécédent* de 3 par f.
Nous dirons aussi que 3 est *l'image* de 2 par f.

Définition 1

> Soit $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres.
>
> On définit une *fonction f sur $\mathscr{D}$* en associant à chaque nombre x appartenant à $\mathscr{D}$ un seul nombre y, noté $f(x)$.
>
> Nous dirons que f est une fonction de la *variable* x.
>
> Nous dirons que $\mathscr{D}$ est *l'ensemble de définition* de f.

Il existe une notation schématique qui regroupe toutes les informations de la définition.

$\mathscr{D}$ est *l'ensemble* (ou *domaine*) *de définition* de f.
$\mathscr{D}$ est l'ensemble des nombres auxquels un nombre est associé par f. On dit que f est définie sur $\mathscr{D}$.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & y \end{array} \right.$$

Cette présentation se lit : « la fonction f, définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui à x associe y ».

x est *un antécédent* de y par f.

y est *l'image* de x par f. On le note $f(x)$ et on lit « f de x ».

Remarques.

1. La première ligne ($\mathscr{D}$ et $\mathbb{R}$) est celle des ensembles, la seconde (x et y) celle des variables.

2. La première colonne ($\mathscr{D}$ et x) correspond à l'axe des abscisses, la seconde ($\mathbb{R}$ et $y = f(x)$) à celui des ordonnées.
3. Le préfixe « anté- » signifie avant (latin).
4. « un » antécédent car il peut y en avoir plusieurs.
5. « l' »image car (par construction) il ne peut y en avoir qu'une.

2 Représenter des liens par une formule de calcul ou un procédé implicite.

Très souvent les liens entre les nombres seront représentés par des calculs. Par exemple nous écrirons

$$f : x \mapsto 2x - 1,$$

et nous lirons « la fonction f qui à x associe $2x - 1$ », pour indiquer qu'à chaque nombre x choisi nous associerons le résultat du calcul $2x - 1$.

Ce lien que vous avez déjà rencontré au collège défini une fonction affine.

Remarques.

1. Si, pour les modélisations en sciences expérimentales (physique, chimie, biologie, géologie, économie,...), les fonctions constantes et linéaires correspondent à des modélisations spécifiques, pour l'étude mathématique, elles ne sont que des cas particuliers de fonctions affines.
2. Pour la fonction racine carrée nous n'avons pas réellement une formule. Nous ne connaissons que les racines carrées des carrés parfaits (0, 1, 4, 9, 16, ...). L'utilisation du symbole $\sqrt{}$ n'indique pas un procédé de calcul pour obtenir ne serait-ce qu'une valeur approchée de la valeur désirée.

   Il s'agit, hormis pour les carrés parfaits, d'un procédé de définition implicite : la racine carrée est l'antécédent positif par la fonction carrée.

II Tableau de valeurs.

Il est possible de représenter les nombres reliés par une fonction en les plaçant en vis-à-vis dans un tableau.

Par exemple, en utilisant la fonction affine précédente, nous voyons :

$$f(-1) = 2 \times (-1) - 1 = -3.$$

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

III Graphe et représentation graphique.

Définition 2

Soient :

. $\mathscr{D}$ un ensemble de nombres,

. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$ une fonction.

Le *graphe de f*, que nous noterons souvent $\mathscr{C}_f$ est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$ lorsque x prend toutes les valeurs possibles dans $\mathscr{D}$.

La *courbe représentative de f* le dessin obtenu en représentant les points du graphe $\mathscr{C}_f$ dans un certain repère.

Remarques.

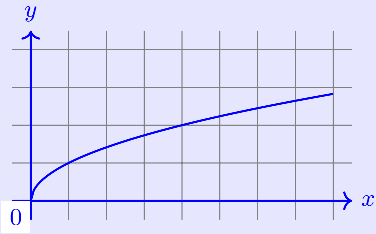
1. Le graphe (pas le dessin mais l'ensemble des couples $(x; f(x))$) est le point de vue retenu pour la définition générale d'une fonction.
2. Comme $f(x)$ est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse x nous dirons aussi que $\mathscr{C}_f$ est la *courbe d'équation $y = f(x)$*.
3. Le graphe de la fonction est un objet mathématique très rigoureux et précis alors que la représentation graphique est un schéma, certes très parlant, mais peu rigoureux. La représentation graphique est souvent importante pour donner du sens, éclairer nos travaux et recherches.

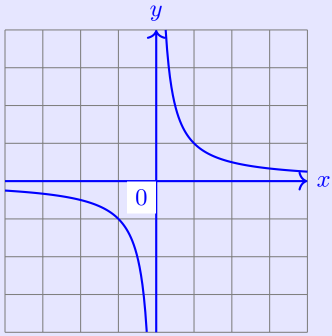
Exercice 1.

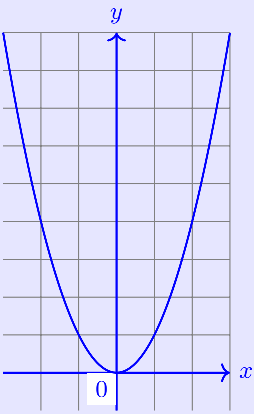
Associez, sans aucune justification, chaque fonction à sa courbe représentative.

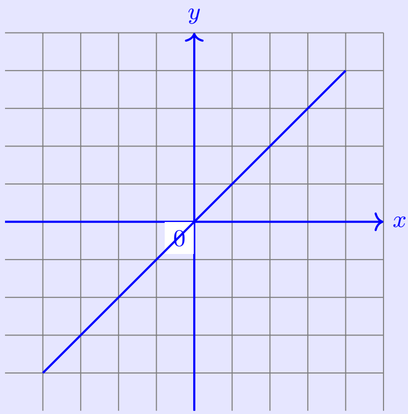
$f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $f_2 : x \mapsto x$,

$f_3 : x \mapsto \sqrt{x}$, $f_4 : x \mapsto x^2$.









Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 27 page 54 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 5.

Exercice 31 page 55 du manuel lelivrescolaire.fr.

IV Parité.

1 Définition algébrique.

Définition 3

Soient :

. $\mathscr{D}_f$ un ensemble de réels symétrique par rapport à 0, autrement dit si $x \in \mathscr{D}_f$, alors $-x \in \mathscr{D}_f$,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$.

Nous dirons que f est *paire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = f(x).$$

Nous dirons que f est *impaire* si et seulement si, quelque soit $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(-x) = -f(x).$$

2 Interprétation géométrique.

Proposition 1

Soient :

. $\mathscr{D}_f$ un ensemble de réels symétrique par rapport à 0,

. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction (définie sur $\mathscr{D}_f$),

. $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O,I,J).

(i) f est paire si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, présente une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

(ii) f est impaire si et seulement si sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, présente une symétrie par rapport à l'origine du repère.

Exercice 6.

Exercice 7.
Exercice 42 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 8.
Exercice 46 page 57 du manuel lelivrescolaire.fr.

Exercice 9.
Déterminez toutes les valeurs de a et b des réels pour lesquels la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est impaire.
Même question pour paire.

V Tableau de variation.

1 Origine géométrique.

2 Définition.

Définition 4

Soient :
. $\mathscr{D}_f \subset \mathbb{R}$ un ensemble,
. $E \subset \mathscr{D}_f$ un ensemble,
. $f : \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction.

Nous dirons que f est *croissante sur* E lorsque, quels que soient x_1 et x_2 choisis dans E, si $x_1 < x_2$ alors, forcément, $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

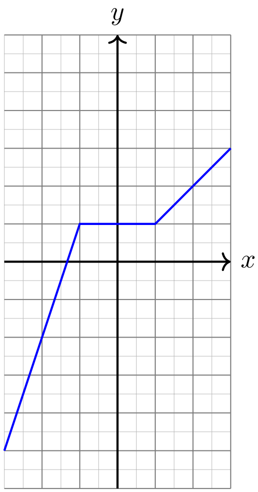
Remarques.

1. Nous pouvons définir de même :
   (a) f est *croissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.
   (b) f est *strictement décroissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) > f(\beta)$.
   (c) f est *décroissante* ssi dès lors que $\alpha < \beta$ alors forcément $f(\alpha) \geqslant f(\beta)$.
2. Nous retiendrons que *les fonctions croissantes conservent l'ordre tandis que les fonctions décroissantes ne conservent pas l'ordre.*
3. C'est une définition complexe. Il faut comprendre l'idée correspondante : dire que f est *croissante* c'est dire que *quand les x augmentent les $f(x)$ augmentent aussi*. Il faut commencer à se familiariser avec l'aspect technique.
4. Une fonction qui est croissante ou décroissante sur tout son ensemble de définition est dite *monotone*. Il existe des fonctions qui ne sont pas monotone.

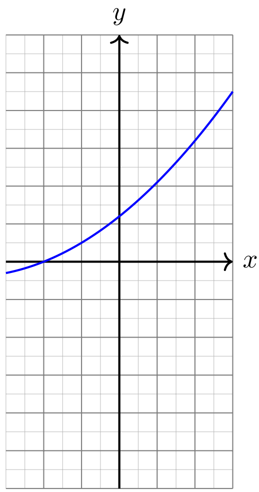
3 Décrire les variations à partir d'une représentation graphique.

Les *fonctions monotones* sont les fonctions dont le sens de variation ne varie pas.

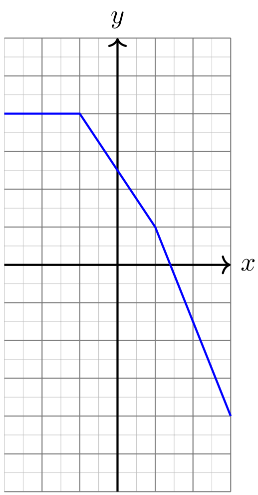
Fonction *croissante*.



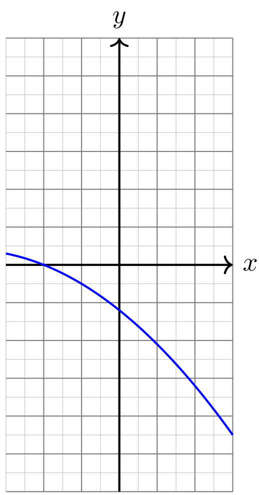
Fonction *strictement croissante*.



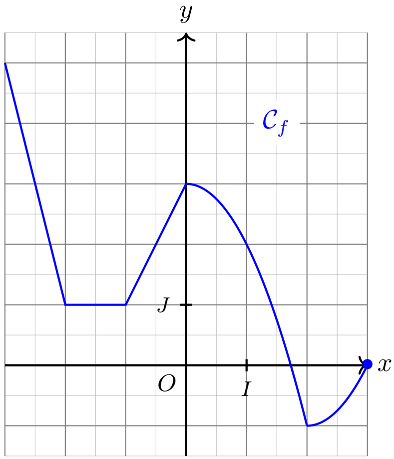
Fonction *décroissante*.



Fonction *strictement décroissante*.



Une fonction n'est pas monotone lorsqu'elle est tantôt croissante tantôt décroissante. Dans ce cas il faut préciser sur quelles parties elle est croissante ou décroissante.

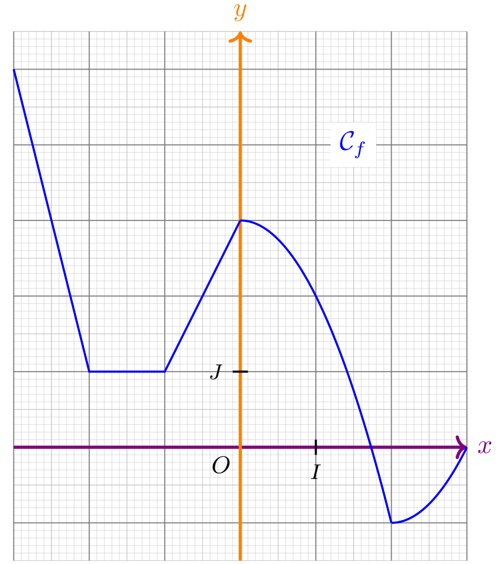


Nous dirons que :
f est strictement décroissante sur $]-\infty;-2]$,
f est constante sur $[-2;-1]$,
f est strictement croissante sur $[-1;0]$,
f est strictement décroissante sur $[0;2]$,
f est strictement croissante sur $[2;3]$.

La courbe fait également apparaître des *sommet* (points haut ou bas de la courbe). Nous dirons que, par exemple, *f admet un minimum (absolu) égale à -1 qui est atteint pour $x = 2$*. Ou encore que *f admet un maximum local sur $[-2;3]$ qui est égale à 3 et qui est atteint en $x = 0$*.

4 Schématisation avec le tableau de variation.

Nous schématiserons la courbe représentative de la fonction par un *tableau de variation*.



x	$-\infty$	-2	-1	0	2	3
f		1	1	3	-1	0

Remarques.

1. Dans un tableau de variation apparaissent bien sûr les variations mais aussi les *extremum* (*minimum* ou *maximum*, *absolu* ou *local*).
2. Les valeurs dans un tableau de variation sont toutes exactes. Pas de valeur approchée.
3. Il est possible de décrire les variations de la fonction à partir du tableau de variation sans connaître la courbe représentative.

5 Variation des fonctions affines.

Proposition 2

Soient :

. a et b deux nombres réels,

. f la fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$ quelque soient $x \in \mathbb{R}$

(i) Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(ii) Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

(iii) Si $a < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

VI Périodicité.

Définition 5

Soient :

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$,

. $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathscr{D}$.

Nous dirons que la fonction f est *périodique* s'il existe un nombre $T \in \mathbb{R}^*$ tel que, quelque soit $x \in \mathscr{D}$, on a $x + T \in \mathscr{D}$ et dans ce cas $f(x + T) = f(x)$.
Si f est périodique T est appelé *une période*.

Remarques.

1. Du pont de vue géométrique son graphe est invariant par translation. Un même motif se répète indéfiniment pour la courbe représentative de f.
2. t est une période est non la période.
3. Si T est une période de f nous dirons que f est *T-périodique*.
4. Les fonctions continues admettent une plus petite période.

VII Fonctions majorées, minorées, bornées.