Matrices.

I Matrice et application associée.

1 Définition.

Définition 1

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}$ un élément de $\mathbb{R}^{nm}$.

Nous appellerons *matrice* à *n lignes* et *m colonnes* le tableau de nombres réels suivant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}.$$

A_{23} est le *coefficient* (ou le terme) de A d'indice (i,j).
L'ensemble des matrices à coefficients réels de n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
Si $n = m$ alors nous dirons que la matrice est *carrée* de taille n. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Application associée.

Définition 2

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (A_{ij})$ une matrice prise dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

. $\vec{x} = (x_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ un vecteur colonne élément de $\mathscr{M}_{m,1}$.

Nous appellerons *application associée à A* l'application définie sur $\mathscr{M}_{m,1}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}$ qui au vecteur colonne $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ associe le vecteur colonne $\left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \times x_i\right)_{1 \leqslant i \leqslant m}$.

En résumé il s'agit de l'application

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \times x_j \\ \sum_{j=1}^{m} A_{2j} \times x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} A_{nj} \times x_j \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

3 Application linéaire.

Définition 3

Une application f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite *linéaire* si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$, $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

Proposition 1

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (A_{ij})$ une matrice prise dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

L'application associée à la matrice A est linéaire.

Proposition 2

Toute application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est l'application associée à une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

II Opérations sur les matrices.

1 Somme et multiplication par un réel.

Proposition 3

Soient :

. n et m deux entiers naturels non nuls.

. λ et μ des réels,

. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$ des éléments de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

(i) $A + B = B + A$.

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

(iii) $(-A) + A = A - A = 0_{n,m}$.

(iv) $A + 0_{n,m} = 0_{n,m} + A = A$.

(v) $0 \cdot A = 0_{n,m}$.

(vi) $1 \cdot A = A$.

(vii) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A$.

(viii) $(\lambda + \mu) \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B + \mu \cdot A + \mu \cdot B$.

2 Produit de matrices.

Définition 4

Soient :

. n, m et p des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $B = (b_{jk}) \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}$.

Nous appellerons produit (matriciel) de A et B la loi qui à A et B associe la matrice $C = (c_{ik})$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

On notera $A \times B = C$ ou $AB = C$.

Proposition 4 - Produit de matrices et applications associées.

L'application associée à $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, est l'application qui à $X \in \mathbb{R}^m$ associe le vecteur $A \times X$ (qui appartient à $\mathbb{R}^n$).

3 Produit de matrices et composition d'applications associées.

Proposition 5

Soient :

. m, n et p des entiers naturels non nuls,

. $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

. $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

. ϖ_A les applications linéaires associées à A et B.

En confondant les matrices A et B et leurs applications associées, nous pouvons dire que l'application associée à $A \times B$ est $A \circ B$ et qu'une matrice associée à l'application $A \times B$ est $A \circ B$.

4 Matrice inverse.

Définition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. A et B des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Nous dirons que A est *l'inverse* de B si et seulement si $AB = BA = I_n$.

III Transposition.

Proposition 6

(i) La transposition est linéaire : ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et $(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

(ii) La transposition est involutive : ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

(iii) ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

IV Systèmes linéaires.

1 Système linéaire et application linéaire.

Proposition 7

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Rechercher les antécédents de $\vec{y}$ par A équivaut à résoudre le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & y_1 \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & y_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{1n}x_1 & + & a_{2n}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & y_n \end{array}\right.$$

en les inconnues x_1, x_2, ..., x_m.

2 Résoudre un système par l'algorithme de Gauss et substitution.

Proposition 8 - Opérations élémentaires sur les systèmes.

On ne modifie l'ensemble des solutions d'un système linéaire en lui appliquant l'une des transformation suivante.

(i) Échange (de place) de deux lignes L et M : $L \leftrightarrow M$.

(ii) Remplacer la ligne L par λL où $\lambda \in \mathbb{R}^*$: $L \leftarrow \lambda L$.

(iii) Remplacer la ligne L par la somme de L et d'une autre ligne M : $L \leftarrow L + M$

3 Ensemble des solutions d'un système linéaire.

Proposition 9

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Le système $A(\vec{x}) = \vec{0}$ a des solutions non triviales si A a moins de lignes que de colonnes.

V Noyau d'une application linéaire.

Définition 6

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. φ_A l'application linéaire associée à A.

Nous appellerons noyau de l'application linaire associée à A l'ensemble

$$\ker(\varphi_A) := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \ |\varphi_A(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Proposition 10

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. φ_A l'application linéaire associée à A.

$\ker(\varphi_A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

VI Injectivité, surjectivité, bijection

1 Définitions.

Définition 7

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une application.

Nous dirons f est *injective* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Nous dirons que f est *surjective* si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Nous dirons que f est *bijective* si et seulement si f est injective et surjective.

Proposition 11

Soient :

. E et F des ensembles,

. $f : E \to F$ une application.

f est bijective si et seulement si : $\forall y \in F,\ \exists! x \in E,\ f(x) = y$.

2 Applications linéaires injectives.

Proposition 12

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. φ_A l'application linéaire associée à A.

L'application linéaire φ_A associée à A est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Un ensemble de combinaisons linéaires.

Définition 8

Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^m$ on note v$(\vec{x},\vec{y})$ et on appelle *espace vectoriel engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$* l'ensemble des vecteurs obtenus comme combinaisons linéaires de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.
Ainsi Vec$(\vec{x},\vec{y})$ est formé de vecteurs de la forme $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ où α et β sont des réels quelconques.

Proposition 13

On remarque que Vec$(\vec{x},\vec{y})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

VII Image d'une application linaire.

Définition 9

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. φ_A l'application linéaire associée à A.

Nous appellerons *image de l'application linéaire φ_A* l'ensemble des images des éléments de $\mathbb{R}^m$ par φ_A.
Nous noterons :

$$\operatorname{Im}(\varphi_A) = \{\varphi_A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\}.$$

Proposition 14

Soient :

. n et m des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. φ_A l'application linéaire associée à A,

. $C_i = AE_{i,1}$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$.

$$\operatorname{Im}(\varphi_A) = \operatorname{Vec}(C_1,C_2,\ldots,C_m).$$

Proposition 15

L'image de l'application linéaire est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

VIII Exercices.