

# Matrices.

## I Matrice et application associée.

### 1 Définition.

#### Exercice 1. ☹

Déterminez les transposées des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

### 2 Application associée.

### 3 Application linéaire.

## II Opérations sur les matrices.

### 1 Somme et multiplication par un réel.

#### Exercice 2. ☹

Exprimez  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  comme une somme double combinaison linéaire des matrices élémentaires  $E_{ij}$ .

#### Exercice 3. ☹

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Exprimez  $A$  en fonction de  $J$  et  $I_3$ .

### 2 Produit de matrices.

#### Exercice 4. ☹

Soit  $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Calculez  $-3I_2 + 2C + C^2$ .

#### Exercice 5. ☹

Soient  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ .

Calculez  $AB$  puis  $BA$ .

## Exercice 6. ☼

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calculez  $AB$ .

## Exercice 7. ☼

Soient  $n \geq 1$  et  $D = (d_{kl})$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que :

$$\forall (k, l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, d_{kl} = 1.$$

Déterminez  $D^p$  pour tout  $p$  dans  $\mathbb{N}^*$ .

## Exercice 8. ☼

On considère la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe deux réels  $a_n$  et  $b_n$  tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et écrivez les relations de récurrence vérifiées par les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

2. Déduisez-en  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Exercice 9. ☼

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  des matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

Exprimez, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n$  en fonction de  $I_3$ ,  $J$  et  $n$

### 3 Produit de matrices et composition d'applications associées.

### 4 Matrice inverse.

Exercice 10. ♣  
 Soient  $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}$ .

1. Montrez que  $B$  est l'inverse de  $A$ .

2. Déduisez-en une solution de l'équation  $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Exercice 11. ♣

Soient  $n \geq 2$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  inversible. Déterminez les solutions  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de  $A^{-1}BA = 0$ .

### III Transposition.

Exercice 12. ♣

Calculez  ${}^tAA$  et  $A{}^tA$  lorsque  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

### IV Systèmes linéaires.

#### 1 Système linéaire et application linéaire.

Exercice 13. ♣

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Déterminez l'ensemble des antécédents de  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  par l'application associée à  $A$ .

#### 2 Résoudre un système par l'algorithme de Gauss et substitution.

## Exercice 14. ♣

Résolvez les systèmes suivants.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ \phantom{2x_1} + x_2 - 3x_3 = 0 \\ \phantom{2x_1} + \phantom{x_2} + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ \phantom{3x_1} + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ \phantom{3x_1} + \phantom{x_2} + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \phantom{4x_2} + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \phantom{4x_2} + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

## Exercice 15. ♣

Résolvez les systèmes suivants.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ \phantom{2x_1} + 4x_2 + 2x_3 = 14 \\ \phantom{2x_1} + \phantom{x_2} + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

d)

## Exercice 16. ♣

Résolvez les systèmes suivants.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 3y - 7z = 10 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 6y - z = 1 \\ 4x + 7y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$$

## Exercice 17. ♣

Déterminez les solutions de l'équation  $B^2 = A$  d'inconnue  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**3 Ensemble des solutions d'un système linéaire.**

**V Noyau d'une application linéaire.**

**VI Injectivité, surjectivité, bijection**

**1 Définitions.**

**2 Applications linéaires injectives.**

## Exercice 18.

Déterminez si l'application linéaire associée à  $A$  est injective.

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

b)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

c)  $A =$

**Un ensemble de combinaisons linéaires.**

**VII Image d'une application linéaire.**

## Exercice 19. ♣

1. Déterminez une représentation paramétrique de  $\text{Im}(\varphi_A)$ .

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminez un système d'équations cartésiennes de  $\text{Im}(\varphi_A)$ . Puis déduisez-en la matrice dont  $\text{Im}(\varphi_A)$  est le noyau.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 28 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

## VIII Exercices.

## Exercice 20.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Déterminez le noyau de l'application linéaire associée à  $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ .

## Exercice 21.

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices non nulles telles que  $AB = 0$ . Montrez que  $A$  et  $B$  ne sont pas inversibles.

Soit  $C$  une matrice telle que  $C^2 + C = 0$ ,  $C$  est-elle inversible ?

## Exercice 22.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$ .

## Exercice 23.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$  et déduisez en que  $A$  est inversible et donnez  $A^{-1}$ .

## Exercice 24.

Résolvez en discutant suivant les valeurs du paramètre  $a$  le systèmes.

$$1. \begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = a \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 + x_2 + (2a-1)x_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 3(a+1) \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} (a+1)x_1 + x_2 + x_3 = a^2 + 3a \\ x_1 + (a+1)x_2 + x_3 = a^3 + 3a^2 \\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 = a^4 + 3a^3 \end{cases}$$

## Exercice 25.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

1. Montrez que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$ .

2. Donnez une expression explicite de  $(a_n)$  puis déduisez-en une expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

## Exercice 26.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculez  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .