# Matrices.

## I Matrice et application associée.

### 1 Définition.

Exercice 1.

Déterminez les transposées des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

### 2 Application associée.

### 3 Application linéaire.

## II Opérations sur les matrices.

### 1 Somme et multiplication par un réel.

Exercice 2.

Exprimez $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ comme une somme double combinaison linéaire des matrices élémentaires $E_{ij}$.

Exercice 3.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exprimez $A$ en fonction de $J$ et $I_3$.

### 2 Produit de matrices.

Exercice 4.

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $-3I_2 + 2C + C^2$.

Exercice 5.

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Calculez $AB$ puis $BA$.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Calculez $AB$.

Exercice 7.

Soient $n \geqslant 1$ et $D = (d_{kl})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ d_{kl} = 1.$$

Déterminez $D^p$ pour tout $p$ dans $\mathbb{N}^*$.

Exercice 8.

On considère la matrice $A$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et écrivez les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)$ et $(b_n)$.
2. Déduisez-en $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Exprimez, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n$ en fonction de $I_3$, $J$ et $n$

## 3 Produit de matrices et composition d'applications associées.

## 4 Matrice inverse.

**Exercice 10.** ⚽

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $B$ est l'inverse de $A$.
2. Déduisez-en une solution de l'équation $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 11.** ⚽

Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Déterminez les solutions $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de $A^{-1}BA = 0$.

# III Transposition.

**Exercice 12.** ⚽

Calculez ${}^tAA$ et $A{}^tA$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$${}^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

# IV Systèmes linéaires.

## 1 Système linéaire et application linéaire.

**Exercice 13.** ☯

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminez l'ensemble des antécédents de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par l'application associée à $A$.

## 2 Résoudre un système par l'algorithme de Gauss et substitution.

Exercice 14.

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & & & 4x_3 & = & 4 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ & & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

f) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ -6x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -6x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -6 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$

Exercice 15.

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ & & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ & & & & 2x_3 & = & 6 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 4 \end{array}\right.$

d)

Exercice 16.

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2 \\ 3x & - & 5y & = & 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & 3y & - & 7z & = & 10 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$

Exercice 17. ⚽
Déterminez les solutions de l'équation $B^2 = A$ d'inconnue $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

### 3 Ensemble des solutions d'un système linéaire.

## V Noyau d'une application linéaire.

## VI Injectivité, surjectivité, bijection

### 1 Définitions.

### 2 Applications linéaires injectives.

Exercice 18.
Déterminez si l'application linéaire associée à $A$ est injective.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $A =$

## Un ensemble de combinaisons linéaires.

## VII Image d'une application linaire.

Exercice 19. ⚽

1. Déterminez une représentation paramétrique de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Déterminez un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$. Puis déduisez-en la matrice dont $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est le noyau.

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 28 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$.

   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

# VIII Exercices.

Exercice 20.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez le noyau de l'application linéaire associée à $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 20

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $\alpha \neq 0$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha^2-1)x_2 & + & (\alpha-1)x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha-1)x_2 & + & (\alpha^2-1)x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha-1)(\alpha+1)x_2 & + & (\alpha-1)x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha-1)x_2 & + & (\alpha-1)(\alpha+1)x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha-1)(\alpha+1)x_2 & + & (\alpha-1)x_3 & = & 0 \\ & & & & [(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+1)-(\alpha-1)]x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Or $(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+1)-(\alpha-1) = (\alpha-1)[(\alpha+1)(\alpha+1)-1] = (\alpha-1)\alpha(\alpha+2)$ donc, puisque $\alpha \neq 0$ il reste trois cas à distinguer.

* Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;1;-2\}$.

  $\mathscr{S} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

* Si $\alpha = 1$.

  $\mathscr{S} = \left\{\lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

* Si $\alpha = -2$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & -3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

  Donc $x_2 = x_3$ puis $x_1 = x_3$.

  $\mathscr{S} = \left\{\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Il reste le cas $\alpha = 0$ et alors

$\mathscr{S} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

**Exercice 21.**

Soient $A$ et $B$ deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Montrez que $A$ et $B$ ne sont pas inversibles.
Soit $C$ une matrice telle que $C^2 + C = 0$, $C$ est-elle inversible ?

**Exercice 22.**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = 0$.

## Exercice 23.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$ et déduisez en que $A$ est inversible et donnez $A^{-1}$

## Exercice 24.

Résolvez en discutant suivant les valeurs du paramètre $a$ le systèmes.

1. $\begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = a \end{cases}$
2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + (2a-1)x_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 3(a+1) \end{cases}$
3. $\begin{cases} (a+1)x_1 + x_2 + x_3 = a^2 + 3a \\ x_1 + (a+1)x_2 + x_3 = a^3 + 3a^2 \\ x_1 + x_2 + (a+1)x_3 = a^4 + 3a^3 \end{cases}$

## Exercice 25.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}$.
2. Donnez une expression explicite de $(a_n)$ puis déduisez-en une expression de $A^n$ en fonction de $n$.

## Exercice 26.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.