# Matrices.

## I Matrice et application associée.

### 1 Définition.

Définition 1

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $(A_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ un élément de $\mathbb{R}^{nm}$.

Nous appellerons *matrice* à $n$ *lignes* et $m$ *colonnes* le tableau de nombres réels suivant

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nm} \end{pmatrix}.$$

$A_{23}$ est le *coefficient* (ou le terme) de $A$ d'indice $(i,j)$.
L'ensemble des matrices à coefficients réels de $n$ lignes et $p$ colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
Si $n = m$ alors nous dirons que la matrice est *carrée* de taille $n$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille $n$ est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemples.

1. Considérons la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$

   Décrivons $M$.

2. Nous noterons $0_{n,m}$ (et si la situation est claire juste 0) et nous appellerons *matrice nulle* la matrice de taille $n \times m$ dont tous les coefficients sont nuls.

3. Une matrice de $\mathscr{M}_{n,1}$ comme $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est appelée une *matrice colonne* ou un *vecteur colonne*.

4. Une matrice de $\mathscr{M}_{1,m}$ comme $\begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée une *matrice ligne* ou un *vecteur ligne*.
5. Les coefficients $A_{ii}$ d'une matrice carrée sont appelés les *coefficients diagonaux* de $A$. Ainsi pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ les termes diagonaux sont 3, 5 et 9.
6. Parmi les matrices carrées on distingue certaines matrices : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ est dite *triangulaire supérieure*, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est dite *triangulaire inférieure*, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est dite *diagonale*. Une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1 est appelée une *matrice identité* et est notée $I_n$.
7. Les matrices formées de 1 ligne et 1 colonne peuvent être identifiées au nombres réels. $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ correspond à 2.
8. On note $E_{23}$, et on appelle matrice élémentaire d'indice $(i,j)$, la matrice (peu importe sa taille) dont tous les coefficients sont nuls hormis celui d'indice $(i,j)$ qui vaut 1.
$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
9. On appelle *transposée* de
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ définie par :
$$^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$
Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & a \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ alors $^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ a & 6 \end{pmatrix}$.

Remarques.

1. Les matrices peuvent être vues comme des éléments de $\mathbb{R}^{nm}$. Les propriétés vues sur les espaces $\mathbb{R}$ peuvent donc leur être appliquées.
2. Les coefficients seront notés indifféremment avec des minuscules ou des majuscules : $a_{ij}$ ou $A_{ij}$.

**Exercice 1.** ◕

Déterminez les transposées des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

## 2 Application associée.

**Définition 2**

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (A_{ij})$ une matrice prise dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

. $\vec{x} = (x_j)_{1 \leq j \leq m}$ un vecteur colonne élément de $\mathscr{M}_{m,1}$.

Nous appellerons *application associée à $A$* l'application définie sur $\mathscr{M}_{m,1}$ à valeurs dans $\mathscr{M}_{n,1}$ qui au vecteur colonne $(x_i)_{1 \leq i \leq m}$ associe le vecteur colonne $\left(\sum_{j=1}^{m} A_{ij} \times x_i\right)_{1 \leq i \leq m}$.

En résumé il s'agit de l'application

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} A_{1j} \times x_j \\ \sum_{j=1}^{m} A_{2j} \times x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} A_{nj} \times x_j \end{pmatrix} \end{array} \right. .$$

Remarques.

1. Nous confondrons dans les notations une matrice et l'application associée en notant les deux $A$. L'image de $x \in \mathscr{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ sera donc notée $A(x)$.
2. Dans la suite, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sera noté $\mathbb{R}^n$, cette confusion ne posant pas problème.
3. N'insistons pas sur cette définition ; l'aspect matriciel la rendra plu digeste.

## 3 Application linéaire.

Définition 3

Une application $f$ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est dite *linéaire* si et seulement si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $f(\lambda \vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$.

(ii) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^m$, $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

Exemples.

1. L'application $f$ définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeur dans $\mathbb{R}^3$ par : si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ alors $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   Démontrons que cette application $f$ est linéaire.

   * $f$ est une application de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

   * Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f(\lambda \vec{x}) = f\left[\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3(\lambda x_1) + (\lambda x_2) \\ -(\lambda x_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \times (3x_1 + x_2) \\ \lambda \times (-x_2) \\ \lambda \times 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda f(\vec{x})$.

   * De même $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

   $f$ est linéaire.

2. $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x \end{array} \right.$ est une application linéaire.

   * $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ (*i.e.* $\mathbb{R}^1$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

   * Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $x$ et $y$ des éléments de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(\lambda x + y) &= 3 \times (\lambda x + y) \\ &= \lambda 3x + 3y \\ &= \lambda g(x) + g(y) \end{aligned}$$

Donc $g$ est bien une application linéaire.

Les applications qu'au collège nous appelions fonctions linéaire sont des applications linéaires.

3. L'application $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

4. L'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ n'est pas linéaire.

   L'application est bien définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, des espaces vectoriels, mais

$$\varphi\left(1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   et

$$1\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   et donc : $\varphi\left(1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 1\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Autrement dit $\varphi$ n'est pas linéaire.

Remarques.

1. Ainsi une application est linéaire si elle "respecte" l'addition (on dit qu'elle est additive) et si elle "respecte" la multiplication par un nombre (on dit qu'elle est homogène).
2. En tenant compte des deux propriétés simultanément nous voyons qu'une application linéaire "respecte" les combinaisons linéaires : $f(\lambda\vec{x} + \mu\vec{x}) = \lambda f(\vec{x}) + \mu f(\vec{y})$.
3. Pour démontrer qu'une application est linéaire il faut d'abord s'assurer que les ensembles de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels de la forme $\mathbb{R}^n$ puis que, quels que soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des vecteurs de l'ensemble de départ : $f(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda f(\vec{x}) + f(\vec{y})$.

## Proposition 1

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (A_{ij})$ une matrice prise dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

L'application associée à la matrice $A$ est linéaire.

## Démonstration

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ des éléments de $\mathbb{R}^m$.

Démontrons que $A(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda A(\vec{x}) + A(\vec{y})$.

Introduisons une notation pour le vecteur image.
Notons $\vec{z} = A(\lambda\vec{x} + \vec{y})$.
Commençons par choisir une ligne quelconque du vecteur image.
Soit $i \in [\![1,n]\!]$.
Par définition de l'application linéaire associée à $A$ la coordonnées $z_i$ du vecteur $\vec{z}$ est donnée par :

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(\lambda x_j + y_j)$$

En distribuant :

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda x_j + a_{ij}y_j$$

En regroupant différement les termes sommés :

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\lambda x_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j$$

En factorisant par $\lambda$ dans la première somme :

$$z_i = \lambda\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j$$

Ainsi pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathbb{R}^m$, $A(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda A(\vec{x}) + A(\vec{y})$.
Autrement dit :

$A$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

∎

Proposition 2

Toute application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est l'application associée à une matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Démonstration

Il vaut mieux passer cette démonstration en première lecture. L'idée de cette démonstration semblera beaucoup plus naturelle après que nous ayons vu le lien entre application linéaire et produit matricielle.

Soit $\varphi$ une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$.

La démonstration repose sur l'utilisation des bases canoniques qui n'ont pas encore été vues mais que nous pouvons utiliser.

Il s'agit de trouver la matrice dont $\varphi$ serait la matrice associée. Nous allons la construire.

En notant, pour $j \in [\![1,m]\!]$, $\vec{e}_j$ le vecteur de $\mathbb{R}^m$ dont toutes les coordonnées valent 0 hormis celle de la ligne $j$ qui vaut 1 (autrement dit $\vec{e}_j = E_{j,1}$ en utilisant les matrices élémentaires).

Notons $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \varphi(\vec{e}_j)$.

Puis notons $A$ la matrice $(a_{ij})$ (autrement dit $A$ est formée des vecteurs dont les colonnes sont les vecteurs images $A(\vec{e}_j)$ : $A = \begin{pmatrix} A(\vec{e}_1) & A(\vec{e}_2) & \dots & A(\vec{e}_m) \end{pmatrix}$).

Il est alors aisé de vérifier que $\varphi$ est l'application linéaire associée à $A$.

∎

# II Opérations sur les matrices.

## 1 Somme et multiplication par un réel.

Comme observé plus haut on retrouve les règles générales concernant $\mathbb{R}^n$ muni de son addition et de sa multiplication par un scalaire.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ matrices prisent dans $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ on définie :

- $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.
- $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

### Proposition 3

Soient :

. $n$ et $m$ deux entiers naturels non nuls.

. $\lambda$ et $\mu$ des réels,

. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$ des éléments de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

(i) $A + B = B + A$.

(ii) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.

(iii) $(-A) + A = A - A = 0_{n,m}$.

(iv) $A + 0_{n,m} = 0_{n,m} + A = A$.

(v) $0 \cdot A = 0_{n,m}$.

(vi) $1 \cdot A = A$.

(vii) $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \times \mu) \cdot A$.

(viii) $(\lambda + \mu) \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B + \mu \cdot A + \mu \cdot B$.

Exemples.

1. Addition de deux matrices.
2. Multiplication d'une matrice par un nombre.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ ne peuvent être additionnées l'une à l'autre car elles n'ont pas les mêmes dimensions.

Remarques.

1. Il est impossible d'additionner des matrices n'ayant pas les mêmes dimensions. Elles doivent avoir le même nombre de lignes et de colonnes. L'addition est une loi interne à $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.
2. La multiplication par un réel se fait par la gauche. On évitera donc d'écrire : $A2$ et on préférera : $2A$.
3. $-A = (-a_{ij})$.
4. Comme indiqué dans la proposition au lieu d'écrire $A+(-B)$ on écrira comme nous en avons l'habitude avec les nombres, $A - B$.
5. Hormis si elles sont carrées il n'est pas possible d'additionner une matrice et sa transposée.

Exercice 2. ☯

Exprimez $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ comme une somme double combinaison linéaire des matrices élémentaires $E_{ij}$.

Exercice 3. ⚽

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Exprimez $A$ en fonction de $J$ et $I_3$.

## 2 Produit de matrices.

Définition 4

Soient :

. $n$, $m$ et $p$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $B = (b_{jk}) \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{R}$.

Nous appellerons produit (matriciel) de $A$ et $B$ la loi qui à $A$ et $B$ associe la matrice $C = (c_{ik})$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$c_{ik} := \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

On notera $A \times B = C$ ou $AB = C$.

Exemples.

1. Matrices $3 \times 2$ et $2 \times 3$.
2. Matrice carrée $2 \times 2$.
3. $3 \times 3$ et $3 \times 1$. Lien avec l'application associée.
4. $3 \times 1$ et $1 \times 3$.
5. $1 \times 3$ et $3 \times 1$.
6. Non commutativité en général du fait des lignes et colonnes.
7. Même pour les matrices carrées non commutativité.
8. $A\vec{x} \neq \vec{x}A$
9. Commutativité et matrices scalaires.

Remarques.

1. Nous remarquons que l'application associée à $A$ consiste en la multiplication d'un vecteur colonne par $A$.
2. Le produit matriciel est associatif : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$ et on écrira donc simplement $A \times B \times C$.
3. Nous pourrons noter $A \times A = A^2$, $A \times A \times A = A^3$ etc.

Exercice 4. ⚽

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez $-3I_2 + 2C + C^2$.

Proposition 4 - Produit de matrices et applications associées.

L'application associée à $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, est l'application qui à $X \in \mathbb{R}^m$ associe le vecteur $A \times X$ (qui appartient à $\mathbb{R}^n$).

Démonstration

Il suffit de vérifier en notant $\vec{x} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ que le produit correspond bien à l'image par l'application linéaire associée à $A$.

■

Exemples.

1. Exemples d'images.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

   $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

   On remarque que l'on obtient les colonnes de la matrice $A$. En déterminant les images des vecteurs de ce que nous appellerons plus tard la base canonique nous pouvons retrouver la matrice $A$.

   C'et ce constat qui permet, à partir d'une application linéaire de retrouver la matrice dont elle est l'application associée.

Remarques.

1. Nous confondrons souvent les applications linéaires et les matrices.
2. Si $n = m$ la matrice est carrée et on dit que l'application linéaire associée est un *endomorphisme*.

### Exercice 5. ⚽

Soient $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Calculez $AB$ puis $BA$.

Cet exercice permet de conjecturer deux choses : les produit de deux matrices diagonales est diagonale et le produit deux matrices diagonales est commutatif.

### Exercice 6. ⚽

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculez $AB$.

### Exercice 7. ☯

Soient $n \geqslant 1$ et $D = (d_{kl})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall (k,l) \in [\![1,n]\!]^2,\ d_{kl} = 1.$$

Déterminez $D^p$ pour tout $p$ dans $\mathbb{N}^*$.

### Exercice 8. ☯

On considère la matrice $A$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a_n & b_n \\ 0 & 1 & a_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et écrivez les relations de récurrence vérifiées par les suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

2. Déduisez-en $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

### Exercice 9. ⚽

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exprimez, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n$ en fonction de $I_3$, $J$ et $n$

## 3 Produit de matrices et composition d'applications associées.

Proposition 5

Soient :

. $m$, $n$ et $p$ des entiers naturels non nuls,

. $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{R})$,

. $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

. $\varpi_A$ les applications linéaires associées à $A$ et $B$.

En confondant les matrices $A$ et $B$ et leurs applications associées, nous pouvons dire que l'application associée à $A \times B$ est $A \circ B$ et qu'une matrice associée à l'application $A \times B$ est $A \circ B$.

Démonstration

■

Exemples.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ alors l'application associée à $A \times B$ est
2. Une matrice

## 4 Matrice inverse.

Définition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $A$ et $B$ des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Nous dirons que $A$ est *l'inverse* de $B$ si et seulement si $AB = BA = I_n$.

Remarques.

1. Il faut que $A$ et $B$ commutent et donc qu'elles aient nécessairement les mêmes dimensions.
2. Si $A$ est l'inverse de $B$, alors $B$ est l'inverse de $A$.
3. L'inverse de $A$ est noté $A^{-1}$. Nous avons donc : $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

4. On retrouve la notion d'inverse au sens de la multiplication des nombres réels : l'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$, qui se note aussi $3^{-1}$, car $3 \times 3^{-1} = 1$. $I_n$ joue le même rôle pour les matrices que 1 pour les nombres.
5. La matrice inverse est unique.

Exercice 10. ⚽

Soient $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & -5 \\ 3 & -11 & 7 \\ 9 & -34 & 21 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que $B$ est l'inverse de $A$.
2. Déduisez-en une solution de l'équation $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. ⚽

Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. Déterminez les solutions $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de $A^{-1}BA = 0$.

# III Transposition.

Proposition 6

(i) La transposition est linéaire : ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et $(\lambda A) = \lambda {}^tA$.

(ii) La transposition est involutive : ${}^t\left({}^tA\right) = A$.

(iii) ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$.

Exemples.

1.

Exercice 12. ⚽

Calculez ${}^tAA$ et $A{}^tA$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12

${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

${}^tAA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

# IV Systèmes linéaires.

## 1 Système linéaire et application linéaire.

Nous savons calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire. Recherchons maintenant les antécédents.

Exercice 13.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Déterminez l'ensemble des antécédents de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ par l'application associée à $A$.

Proposition 7

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$.

Rechercher les antécédents de $\vec{y}$ par $A$ équivaut à résoudre le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & y_1 \\ a_{12}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & y_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{1n}x_1 & + & a_{2n}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & y_n \end{array} \right.$$

en les inconnues $x_1$, $x_2$, ..., $x_m$.

Remarques.

1. On dit du système de la proposition qu'il a $n$ équations et $m$ inconnues.
2. Résoudre un tel système c'est trouver l'ensemble de tous les $m$ uplets, $(x_1, x_2, \dots, x_m)$, qui vérifient, simultanément, les $n$ équations.
3. Le précédent système linéaire sera appelé *le système linéaire associé à $A$*.

## 2 Résoudre un système par l'algorithme de Gauss et substitution.

Proposition 8 - Opérations élémentaires sur les systèmes.

On ne modifie l'ensemble des solutions d'un système linéaire en lui appliquant l'une des transformation suivante.

(i) Échange (de place) de deux lignes $L$ et $M$ : $L \leftrightarrow M$.

(ii) Remplacer la ligne $L$ par $\lambda L$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$ : $L \leftarrow \lambda L$.

(iii) Remplacer la ligne $L$ par la somme de $L$ et d'une autre ligne $M$ : $L \leftarrow L + M$

Exemples.

1. Échanger deux lignes.
2. Multiplier une ligne par un nombre non nul.
3. Remplacer une ligne par la somme de cette ligne et d'une autre ligne.
4. En tulisant simultanément les deux dernières opérations éléémentaires.

Remarques.

1. Les deux dernières opérations élémentaires sont souvent utilisées simultanément : $L \leftarrow 2L - 3M$.

Un système (ou une matrice) est dit échelonné si sur chaque ligne le premier coefficient non nul apparaît dans une colonne plus à droite que sur la ligne précédente.

La méthode du pivot de Gauss consiste, par des opérations élémentaires sur les lignes, à trouver, à partir d'un système donné, un autre système qui soit échelonné et qui ait le même ensemble de solutions.

À partir du système échelonné on peut par des substitutions trouver les solutions. L'ensemble des solutions sera le plus souvent représenté par une paramétrisation.

Exemples.

1. $\left\{\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 0 \\ & & 7x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \\ & & & & 8x_3 & = & 8 \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & - & 2x_2 & = & 3 \\ -4x_1 & + & 8x_2 & = & -12 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \end{array}\right.$

4. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 5x_2 = -3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$

L'ensemble des solutions d'un système linéaire est formée de la somme d'une solution particulière $\vec{x}_0$ de $A(\vec{x}) = \vec{y}$ et des solutions du système homogène $A(\vec{x}) = \vec{0}$. Cette propriété est appelée le *principe de superposition*.

Exercice 14. ⚽

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_3 = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

Exercice 15. ⚽

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_2 + 2x_3 = 14 \\ 2x_3 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

d)

Exercice 16.

Résolvez les systèmes suivants.

a) $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 2 \\ 3x & - & 5y & = & 1 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & 3y & - & 7z & = & 10 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right.$

Exercice 17.

Déterminez les solutions de l'équation $B^2 = A$ d'inconnue $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

### 3 Ensemble des solutions d'un système linéaire.

Proposition 9

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

Le système $A(\vec{x}) = \vec{0}$ a des solutions non triviales si $A$ a moins de lignes que de colonnes.

## V Noyau d'une application linéaire.

Définition 6

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\varphi_A$ l'application linéaire associée à $A$.

Nous appellerons noyau de l'application linaire associée à $A$ l'ensemble

$$\ker(\varphi_A) := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^m \ |\varphi_A(\vec{x}) = \vec{0}\right\}.$$

Exemples.

1. Différentes situations de noyaux se sont présentés dans les exemples précédents.

Remarques.

1. En confondant la matrice, $A$, et son application linéaire, $\varphi_A$, nous écrirons $\ker(A)$.
2. $\ker(A)$ est donc l'ensemble des antécédentes du vecteur nul par l'application linéaire associée à $A$.
   Ainsi les éléments de $\ker(A)$ se trouvent tous réduits à $\vec{0}$ en passant par la moulinette $A$.

Proposition 10

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\varphi_A$ l'application linéaire associée à $A$.

$\ker(\varphi_A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

Démonstration

* Par définition $\ker(\varphi_A) \subset \mathbb{R}^m$.
* $A\vec{0}m{,}1 = \vec{0}_{n,1}$ donc $\vec{0}_{m,1} \in \ker(\varphi_A)$.
* Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{x},\vec{y} \in \ker(\varphi_A)$.
  Par linéarité :

$$A(\lambda\vec{x} + \vec{y}) = \lambda A(\vec{x} + A(\vec{y})$$

Or $A(\vec{x}) = A(\vec{y}) = \vec{0}$ car $\vec{x},\vec{y} \in \ker(\varphi_A)$, donc

$$\begin{aligned} A(\lambda\vec{x} + \vec{y}) &= \lambda \times \vec{0} + \vec{0} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Autrement dit $\lambda\vec{x} + \vec{y} \in \ker(\varphi_A)$.

$\ker(\varphi_A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

$\blacksquare$

Remarques.

1. L'image réciproque par $\varphi_A$ de tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

# VI Injectivité, surjectivité, bijection

## 1 Définitions.

Définition 7

Soient :

. $E$ et $F$ des ensembles,

. $f : E \to F$ une application.

Nous dirons $f$ est *injective* si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Nous dirons que $f$ est *surjective* si et seulement si :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y.$$

Nous dirons que $f$ est *bijective* si et seulement si $f$ est injective et surjective.

Exemples.

1. Diagrammes sagittaux.
2. Fonctions de référence.

Remarques.

1. Une application est injective si et seulement si chaque élément de l'ensemble image $f(E)$ admet un unique antécédent par $f$.
2. Une application est injective si les images d'éléments distincts sont distinctes.
3. Une application est surjective si chaque élément de l'ensemble d'arrivé $F$ admet, au moins un antécédent.

Proposition 11

Soient :

. $E$ et $F$ des ensembles,

. $f : E \to F$ une application.

$f$ est bijective si et seulement si : $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$.

Remarques.

1. Dire qu'une application est bijective signifie que tous les éléments des ensembles de départ et d'arrivée sont reliés entre eux et que chaque élément est associé à un seul élément de l'autre ensemble.

## 2 Applications linéaires injectives.

Proposition 12

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\varphi_A$ l'application linéaire associée à $A$.

L'application linéaire $\varphi_A$ associée à $A$ est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$.

Démonstration

Soient

■

Exemples.

1. Déterminons si l'application linéaire associée à la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est injective.
   Recherchons les antécédents de $\vec{0}$ par $\varphi_B$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ & - & x_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Par substitution : $x_2 = 0$ donc $x_1 = 0$.
   Ainsi $\ker(\varphi_B) = \{\vec{0}\}$.
   Autrement dit

$$\boxed{\varphi_B \text{ est injective.}}$$

2. Déterminons si l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est injective.
   Recherchons les antécédents de $\vec{0}$ par $\varphi_A$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \rightarrow L_3 - L_2$$

   Donc $x_2 = -x_3$ puis $x_1 = 0$ et enfin $\ker(\varphi_A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.

   Donc $\ker(\varphi_A) \neq \{\vec{0}\}$ et finalement

$$\boxed{\varphi_A \text{ n'est pas injective (et } \textit{a fortiori} \text{ pas bijective).}}$$

Exercice 18.

Déterminez si l'application linéaire associée à $A$ est injective.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

## Un ensemble de combinaisons linéaires.

Définition 8

Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont des éléments de $\mathbb{R}^m$ on note v$(\vec{x},\vec{y})$ et on appelle *espace vectoriel engendré par $\vec{x}$ et $\vec{y}$* l'ensemble des vecteurs obtenus comme combinaisons linéaires de $\vec{x}$ et $\vec{y}$.
Ainsi Vec$(\vec{x},\vec{y})$ est formé de vecteurs de la forme $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels quelconques.

Proposition 13

On remarque que Vec$(\vec{x},\vec{y})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.

## VII Image d'une application linaire.

Définition 9

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\varphi_A$ l'application linéaire associée à $A$.

Nous appellerons *image de l'application linéaire $\varphi_A$* l'ensemble des images des éléments de $\mathbb{R}^m$ par $\varphi_A$.
Nous noterons :

$$\mathrm{Im}(\varphi_A) = \{\varphi_A(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\}.$$

Remarques.

1. $\mathrm{Im}(\varphi_A) = \varphi_A(\mathbb{R}^m)$.
2. 

Rappelons que $A \times E_{j,1}$ est le $j$-ième vecteur colonne de $A$.

Proposition 14

Soient :

. $n$ et $m$ des entiers naturels non nuls,

. $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,

. $\varphi_A$ l'application linéaire associée à $A$,

. $C_i = AE_{i,1}$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$.

$$\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathrm{Vec}(C_1,C_2,\ldots,C_m).$$

Exemples.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Une représentation paramétrique de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1 & = & 2t+v \\ y_2 & = & -t+3v \end{array} \right. ,(t,v) \in \mathbb{R}^2$$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Déterminons une représentation de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ par un système d'équations cartésiennes.

Échelonnons le système :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & y_1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & y_2 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & y_1 \\ & & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 2y_2 - 3y_1 \\ & & & & 0 & = & y_3 - y_2 + y_1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_2 + L_1 \end{array}$$

Donc

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{une équation cartésienne de } \mathrm{Im}(\varphi_A) \text{ est} \\ y_1 - y_2 + y_3 = 0.\end{array}}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons une représentation de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ par un système d'équations cartésiennes.

Échelonnons le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & y_1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & y_3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & y_1 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & y_2 - 2y_1 \\ & & 2x_2 & - & x3 & = & y_3 - y_1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & y_1 \\ & & 3x_2 & - & 3x_3 & = & y_2 - 2y_1 \\ & & 2x_2 & - & x3 & = & y_3 - y_1 \end{array}\right. \qquad L_3 \to 2L_2 - 3L_3$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathbb{R}^3 \text{ et nous ne donnerons pas d'équation cartésienne.}}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & & & = & y_1 \\ & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & -2y_1 + y_2 \\ & & & & & & x_4 & = & -\frac{3}{2}y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ & & & & & & & = & 2y_1 - y_2 - y_3 \\ & & & & & & & = & -y_1 + y_2 + y_4 \end{array}\right.$$

Donc

un système d'équation cartésienne de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2y_1 - y_2 - y_3 & = & 0 \\ -y_1 + y_2 + y_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous remarquons que l'image de $A$ est le noyau de l'application associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit l'image d'une application linéaire est le noyau d'une autre application linéaire.

Exercice 19. ⚽

1. Déterminez une représentation paramétrique de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$.
   (d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Déterminez un système d'équations cartésiennes de $\mathrm{Im}(\varphi_A)$. Puis déduisez-en la matrice dont $\mathrm{Im}(\varphi_A)$ est le noyau.
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ -4 & 28 \\ 3 & 21 \end{pmatrix}$.
   (b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.
   (c) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   (d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -12 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Proposition 15

L'image de l'application linéaire est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration

$\mathrm{Im}(\varphi_A) = \mathrm{Vec} = (C_1, C_2, \dots, C_m)$ et $\mathrm{Vec} = (C_1, C_2, \dots, C_m)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

■

# VIII Exercices.

Exercice 20.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez le noyau de l'application linéaire associée à $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 20

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & \alpha x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & \alpha x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Si $\alpha \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha^2 - 1)x_2 & + & (\alpha - 1)x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha - 1)x_2 & + & (\alpha^2 - 1)x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha - 1)(\alpha + 1)x_2 & + & (\alpha - 1)x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha - 1)x_2 & + & (\alpha - 1)(\alpha + 1)x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & (\alpha - 1)(\alpha + 1)x_2 & + & (\alpha - 1)x_3 & = & 0 \\ & & & & \left[(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha + 1) - (\alpha - 1)\right]x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Or $(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha + 1) - (\alpha - 1) = (\alpha - 1)\left[(\alpha + 1)(\alpha + 1) - 1\right] = (\alpha - 1)\alpha(\alpha + 2)$ donc, puisque $\alpha \neq 0$ il reste trois cas à distinguer.

* Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1; -2\}$.

  $\mathscr{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

* Si $\alpha = 1$.

  $\mathscr{S} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

* Si $\alpha = -2$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & -3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc $x_2 = x_3$ puis $x_1 = x_3$.

$\mathscr{S} = \left\{\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Il reste le cas $\alpha = 0$ et alors

$\mathscr{S} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

## Exercice 21.

Soient $A$ et $B$ deux matrices non nulles telles que $AB = 0$. Montrez que $A$ et $B$ ne sont pas inversibles.
Soit $C$ une matrice telle que $C^2 + C = 0$, $C$ est-elle inversible ?

## Exercice 22.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$.

## Exercice 23.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$ et déduisez en que $A$ est inversible et donnez $A^{-1}$

## Exercice 24.

Résolvez en discutant suivant les valeurs du paramètre $a$ le systèmes.

1. $\left\{\begin{array}{ccccc} ax_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & = & a \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & (2a-1)x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 3(a+1) \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{ccccccc} (a+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a^2 + 3a \\ x_1 & + & (a+1)x_2 & + & x_3 & = & a^3 + 3a^2 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+1)x_3 & = & a^4 + 3a^3 \end{array}\right.$

Exercice 25.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Donnez une expression explicite de $(a_n)$ puis déduisez-en une expression de $A^n$ en fonction de $n$.

Exercice 26.

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculez $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27.

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que $A$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrez que $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
2. (a) Une matrice inversible peut-elle être nilpotente ?
   (b) Une matrice non inversible est-elle forcément nilpotente ? Vous pourrez considérer $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et calculer $M^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. (a) Si $A$ et $B$ sont nilpotentes la somme $A+B$ est-elle nilpotente ? (on pourra envisager $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Soit $A$ et $B$ deux matrices nilpotentes telles que $AB = BA$. Montrer que la somme $A+B$ est nilpotente. (Avec formule du binôme de Newton.)

## IX Ce qu'il faut retenir.

1. Méthodes : produit de deux matrices, résolution d'un système par la méthode de Gauss, déterminer le noyau d'une application linéaire avec une paramétrisation ou avec une combinaison linéaire de vecteurs, déterminer l'image d'une application linéaire par une paramétrisation, par une combinaison linéaire de vecteurs ou par un système d'équations cartésienne.

2. Nouveaux objets et mots : matrice, matrice triangulaire, matrice diagonale, application linéaire, système linéaire échelonné, noyau d'une application linéaire, application injective, application surjective, application bijective, image d'une application linéaire.