Espace $\mathbb{R}^n$.

I Définition de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1

Soient :

. E et F des ensembles,

. x et y deux éléments respectivement de E et F.

On appelle *couple* "x, y" et on note (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Remarques.

1. On notera également les couples en colonne : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Proposition 1

Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des éléments.

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Remarques.

1. Cela signifie en particulier que, en général, $(x,y) \neq (y,x)$: on ne peut intervertir les éléments d'un couple. dans un couple l'ordre compte.

Définition 2

Soient :

. E et F des ensembles.

Nous appellerons *produit cartésien de* E et F l'ensemble que nous noterons $E \times F$ formé de tous les couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarques.

1. Si $E = F$ plutôt que d'écrire $E \times E$ nous écrirons E^2.
   De même $E \times E \times E = E^3$.

2. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ facteurs}}$ est noté $\mathbb{R}^n$.

   Nous conviendrons (c'est donc une notation) que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ pour des raisons de convenance qui apparaîtrons plus tard.

3. En itérant le procédé nous définirions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-uplets (ou n-listes) : $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$.

   L'ensemble des n-uplets est encore appelé produit cartésien et est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

II Des opérations sur $\mathbb{R}^n$.

1 Addition.

Définition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

. $(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Nous appellerons *somme des n-uplets* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, le n-uplet définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Remarques.

1. Attention de ne pas confondre : ici x et y désigne des n-uplets pas l'abscisse et l'ordonnée.
2. C'est, notamment, pour faciliter ce calcul que nous présenterons les n-uplets en colonnes.
3. Nous avons défini une loi de composition interne à $\mathbb{R}^n$: c'est-à-dire une application qui à deux éléments de $\mathbb{R}^n$ associe un élément de $\mathbb{R}^n$.

4. Pour alléger les écritures un n-uplet sera souvent désigné par une seule lettre : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Proposition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$.

L'addition des n-uplets est

(i) *commutative* :
$$x + y = y + x.$$

(ii) *associative* :
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Remarques.

1. Le fait que l'addition de n-uplets soit associative permet d'écrire des successions d'additions sans aucune parenthèse : $x + y + z$.

2 Multiplication par un scalaire.

Définition 4

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

. $a \in \mathbb{R}$.

Nous appellerons *produit du n-uplet* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *par le scalaire* a, le n-uplet définie par

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \times x_1 \\ a \times x_2 \\ \vdots \\ a \times x_n \end{pmatrix}.$$

Remarques.

1. On peut y voir une distributivité sur chacune des coordonnées.
2. Nous avons défini une loi externe : c'est-à-dire une application qui à un élément de $\mathbb{R}$ et à un élément de $\mathbb{R}^n$ associe un élément de $\mathbb{R}^n$.
3. Remarquons que nous avons défini la multiplication uniquement à gauche nous n'écrions pas $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2$.

Proposition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$.

. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Le produit de n-uplet par un scalaire

(i) est associatif :
$$(a \times b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x).$$

(ii) assure que chaque n-uplet admet un *opposé* :
$$x + (-1) \cdot x = 0.$$

(iii) est *distributif* sur l'addition des n-uplets :
$$(a + b) \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y.$$

Remarques.

1. Les deux opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, et toutes les propriétés énoncées ci-dessus, confèrent à $\mathbb{R}^n$ une structure d'espace vectoriel.

   Autrement dit les n-uplets peuvent être vus comme des vecteurs à part entière. D'ailleurs nous parlerons indifféremment de n-uplet ou de *vecteur*.
2. La troisième propriétés est la classique double distributivité.
3. On a aussi : $a \cdot x = 0 \iff a = 0$ ou $x = 0$.

III Combinaisons linéaires.

1 Combinaison linéaire.

Définition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$,

. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Nous appellerons *combinaison linéaire* des vecteurs x et y tout vecteur de la forme

$$a \cdot x + b \cdot y.$$

Remarques.

1. On définirait de la même façon des combinaisons linéaires de 3 ou 4 vecteurs.
2. Nous pouvons remarquer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. De même tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2 Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Définition 6

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$.

Nous dirons qu'un ensemble F est *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) $F \subset \mathbb{R}^n$,

(ii) F est non vide,

(iii) F est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y) \in F^2,\ a \cdot x + b \cdot y \in F.$$

Remarques.

1. La stabilité par combinaison linéaire signifie qu'il est impossible, en utilisant des combinaisons linéaires d'éléments de F, d'obtenir un vecteur qui ne soit pas dans cet ensemble.
   La somme de deux vecteurs du plan affine reste un vecteur de ce plan.
2. Tous les sous-espace vectoriels contiennent à minima le vecteur nul, c'est pourquoi pour montrer que F est non vide on s'assure que $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.
   La contraposée sera très intéressante : si $0 \notin F$ alors F n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Pour s'assurer de la stabilité par combinaison linéaire il suffit de vérifier que :
   $$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in F^2,\ a \cdot x + y \in F.$$
4. Ces critères sont à connaître par cœur. Nous verrons plus tard d'autre façons de vérifier qu'une partie est un sous-espace vectoriel.
5. Le sous-espace vectoriel possède des propriétés semblables à celle de $\mathbb{R}^n$.

3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Définition 7

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2$.

x et y sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel a tel que

$$x = a \cdot y \quad \text{ou} \quad y = a \cdot x$$

Remarques.

1. Dire qu'ils sont colinéaires c'est dire qu'il représentent la même ligne, la même direction. Autrement dit ils sont vecteurs directeurs des mêmes droites affines.
2. Nous verrons une notion qui généralise celle-ci. Des vecteurs seront dit liés s'il existe une combinaison linaire $a \cdot x + b \cdot y = 0$ dont les coefficients a et b ne sont pas tous nuls.
3. La colinéarité est une sorte de proportionnalité.

Proposition 4 - Classification des sous-espaces vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

F vérifie l'une des trois situations qui s'excluent mutuellement :

(i) $F = \{0\}$,

(ii) Il existe $e \in \mathbb{R}^2$ tel que $F = \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(iii) $F = \mathbb{R}^2$.

Remarques.

1. Ainsi les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\mathbb{R}^2$ tout entier, l'espace réduit à 0 et des droites vectorielles.

IV Équation et paramétrisation d'une droite affine ou vectorielle.

1 Droites affines.

Définition 8

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $A(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux points de $\mathbb{R}^n$.

Nous noterons $\overrightarrow{AB}$ et nous dirons « vecteur A, B », le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\overrightarrow{AB} := \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Définition 9

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $A(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux points distincts de $\mathbb{R}^n$.

Nous appellerons *droite affine* (AB) l'ensemble

$$(AB) := \left\{ M \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \right\}.$$

Remarques.

1. $A \in (AB)$ et $B \in (AB)$.

Proposition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathscr{D}$ est une droite affine de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe un point $A \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que :

$$\mathscr{D} = \left\{ A + \lambda \cdot u \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans ce cas nous dirons que u est un *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. En particulier $A \in \mathscr{D}$.

2. On notera éventuellement $\mathscr{D} = A + \mathbb{R} \cdot u$.
3. Autrement dit une droite affine est entièrement définie par la donnée de l'un de ses points et d'un vecteur non nul.
4. Il n'y a pas unicité du vecteur directeur puisque tout vecteur colinéaire à u est aussi un vecteur directeur.
5. L'ensemble des vecteurs directeurs de la droite affine $\mathscr{D}$ est :

$$\{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Nous reconnaissons une droite vectorielle. Nous dirons que cette droite vectorielle est *la direction* de la droite affine $\mathscr{D}$.

Proposition 6

Soient :
. $n \in \mathbb{N}^*$,
. $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$,
. $A = (a_1,a_2,\cdots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ un point de $\mathbb{R}^n$,
. $\mathscr{D}$ la droite affine passant par A et de vecteur directeur u.

$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} m_1 = u_1 \times t + a_1 \\ m_2 = u_2 \times t + a_2 \\ \vdots \\ m_n = u_n \times t + a_n \end{cases}$$

Remarques.

1. Le système de n équations qui caractérise la droite affine est appelé *une paramétrisation* de la droite affine.
2. La paramétrisation n'est pas unique puisqu'elle dépend du choix de A et de u.

2 Droites vectorielles.

Définition 10

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $D \subset \mathbb{R}^n$.

Nous dirons que D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$D = \{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Remarques.

1. Une droite vectorielle est une droite affine qu'on aurait détachée de son point A et qui serait donc mouvante (comme un vecteur).
2. Toute droite vectorielle peut être vue comme une droite affine passant par le point $(0,0,\ldots,0)$. Nous aurons en particulier la représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 = u_1 \times t \\ m_2 = u_2 \times t \\ \vdots \\ m_n = u_n \times t \end{array}\right.$$

3. On peut faire un parallèle entre droites vectorielle et affine d'une part et fonctions linéaire et affine d'autre part.
4. Une droite vectorielle représente la direction d'une infinité de droites affines.
5. On notera éventuellement $D = \mathbb{R} \cdot u$.
6. Plutôt que de parler de vecteur directeur comme pour les fonctions affines,nous dirons que u est une base de la droite vectorielle.

Proposition 7

Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ en est un sous-espace vectoriel.

3 Représenter une droite de $\mathbb{R}^2$ par une équation.

V Exercices.