

Espace \mathbb{R}^n .I Définition de \mathbb{R}^n .II Des opérations sur \mathbb{R}^n .

1 Addition.

Exercice 1. ☼

Sommez dans chaque cas.

$$\text{a) } s_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } s_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1000 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 428 \\ -\frac{4}{21} \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } s_3 = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ \pi \\ 2 + 8\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \times 10^4 \\ -12\pi \\ -5 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } s_4 = \begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,001 \\ 134,56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,25 \\ -0,042 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

2 Multiplication par un scalaire.

Exercice 2. ☼

Résolvez dans \mathbb{R}^2 l'équation d'inconnue x :

$$3 \cdot x + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -7 \cdot x - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. ☼

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Calculez dans \mathbb{R}^3 la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 2^k \end{pmatrix}.$$

III Combinaisons linéaires.

1 Combinaison linéaire.

Exercice 4.

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les combinaisons suivantes soient nulles.

$$\text{a) } a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \end{pmatrix}. \quad \text{b) } a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}. \quad \text{c) } a \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 50 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

$$\text{d) } a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les égalités soient vérifiées.

$$\text{a) } a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \text{b) } a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$\text{c) } a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}. \quad \text{d) } a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

2 Sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n .

Exercice 6.

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

$$\text{a) } F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid r - s = 0 \text{ et } s + t = 0 \right\}.$$

$$\text{b) } F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a + b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$\text{c) } F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$\text{d) } F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid r + s + t = 1 \right\}.$$

$$\text{e) } F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2r + 3s = 0 \right\}.$$

Exercice 7.

Soient x et y des vecteurs éléments de \mathbb{R}^2 .

1. Démontrez que $E_1 = \{a \cdot x \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .
2. Démontrez que $E_2 = \{a \cdot x + b \cdot y \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .

3 Sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .

Exercice 8. ♣

Dites si les vecteurs proposés sont colinéaires ou pas.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} + 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \pi - \sqrt{\pi} \\ \pi - 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1,2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7,2 \\ -42 \\ 30 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

IV Équation et paramétrisation d'une droite affine ou vectorielle.

1 Droites affines.

Exercice 9. ♣

Donnez des représentations paramétriques des droites suivantes.

a) \mathcal{D}_1 passant par $A = \begin{pmatrix} -12 \\ 35 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$.

b) \mathcal{D}_2 passant par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) \mathcal{D}_3 passant par $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2^3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

d) \mathcal{D}_4 passant par $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -434 \end{pmatrix}$.

e) \mathcal{D}_5 passant par $A = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

f) \mathcal{D}_6 passant par $A = \begin{pmatrix} 76 \\ 435 \\ -986 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -84 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. ♣

On considère les droites, respectivement \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , dont des représentations paramétriques sont

$$\begin{cases} m_1 = -3t + 2 \\ m_2 = 2t - 7 \\ m_3 = 4t + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m_1 = 6t - 4 \\ m_2 = -4t - 3 \\ m_3 = -8t + 9 \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrez que les points $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ appartiennent aux deux droites.

2. Concluez.

Exercice 11.

Exercice 12.

2 Droites vectorielles.

Exercice 13.

3 Représenter une droite de \mathbb{R}^2 par une équation.

V Exercices.

Exercice 14.

Justifiez que l'ensemble F est une droite vectorielle en en donnant une représentation paramétrique.

1. $F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3x_2\}$.
2. $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_3 \text{ et } x_2 = 7x_3\}$.

Exercice 15.

Soient $e_1 = (1,0,0)$ et $e_2 = (0,1,0)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 .

1. Justifiez que $F_1 = \{\lambda \cdot e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{\lambda \cdot e_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont des droites vectorielles.
2. Déterminez $F_1 \cap F_2$.

Exercice 16.

Existe-t-il une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ qui égale le vecteur nul? Si oui, Déterminez toutes les combinaisons linéaires qui égalent le vecteur nul.

Exercice 17.

Démontrez que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 .

Il s'agit à chaque fois de droites vectorielles.

1. *Présentation en représentation paramétrique classique.*

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = -2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. *Présentation en représentation paramétrique en ligne.*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}, x_1 = 7t \text{ et } x_2 = 14t\}.$$

3. *Présentation dans laquelle le paramètre de la représentation paramétrique est une des coordonnées, ici x_1 .*

$$F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

4. *Présentation dans laquelle les équations paramétriques sont directement écrites dans les coordonnées.*

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$