Espace $\mathbb{R}^n$.

I Définition de $\mathbb{R}^n$.

II Des opérations sur $\mathbb{R}^n$.

1 Addition.

Exercice 1.

Sommez dans chaque cas.

a) $s_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$.

b) $s_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1000 \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 428 \\ -\frac{4}{21} \end{pmatrix}$.

c) $s_3 = \begin{pmatrix} 2 \times 10^3 \\ \pi \\ 2 + 8\sqrt{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \times 10^4 \\ -12\pi \\ -5 - 4\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

d) $s_4 = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -0{,}001 \\ 134{,}56 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -0{,}042 \\ 17 \end{pmatrix}$.

2 Multiplication par un scalaire.

Exercice 2.

Résolvez dans $\mathbb{R}^2$ l'équation d'inconnue x :

$$3 \cdot x + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -7 \cdot x - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculez dans $\mathbb{R}^3$ la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 2^k \end{pmatrix}.$$

III Combinaisons linéaires.

1 Combinaison linéaire.

Exercice 4.

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les combinaisons suivantes soient nulles.

a) $a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \end{pmatrix}$.
b) $a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$.
c) $a \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 50 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \end{pmatrix}$.
d) $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4

a)
$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a & -7b & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Pour chaque valeur de b une valeur de a convient il y a une infinité de solutions : $(a,b) = (7,1)$ convient.

b)
$$\left\{ \begin{array}{rrcl} 3a & -2b & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Pour chaque valeur de b une valeur de a convient il y a une infinité de solutions : $(a,b) = (2,3)$ convient.

c)
$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a & & = & 0 \\ & b & = & 0 \end{array} \right.$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = (0,0)$.

d)
$$\left\{ \begin{array}{rrcl} a & & = & 0 \\ & b & = & 0 \end{array} \right.$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = (0,0)$.

Exercice 5.

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les égalités soient vérifiées.

a) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.
b) $a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$.
c) $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.
d) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5

a)

$$\begin{cases} a & = \frac{11}{5} \\ b & = \frac{29}{5} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = \left(\frac{11}{5}, \frac{29}{5}\right)$.

b)

$$\begin{cases} a & = \frac{29}{3} \\ b & = \frac{28}{3} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = \left(\frac{29}{3}, \frac{28}{3}\right)$.

c)

$$\begin{cases} a & = -\frac{37}{10} \\ b & = -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = \left(-\frac{37}{10}, -\frac{13}{5}\right)$.

d)

$$\begin{cases} a & = -7 \\ b & = 5 \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = (-7,5)$.

2 Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6.

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

a) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r - s = 0 \text{ et } s + t = 0 \right\}$.

b) $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

c) $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$.

d) $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r + s + t = 1 \right\}$.

e) $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2r + 3s = 0 \right\}$.

Correction de l'exercice 6

a)

$$(ax_1 + y_1) - (ax_2 + y_2) = a(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$$

Or $x \in F_1$ donc $x_1 - x_2 = 0$ et $y \in F_1$ donc $y_1 - y_2 = 0$, d'où

$$(ax_1 + y_1) - (ax_2 + y_2) = 0$$

De même

$$(ax_2 + y_2) + (ax_3 + y_3) = a(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)$$

Or $x \in F_1$ donc $x_2 + x_3 = 0$ et $y \in F_1$ donc $y_2 + y_3 = 0$, d'où

$$(ax_2 + y_2) + (ax_3 + y_3) = 0$$

Ainsi : $a \cdot x + y \in F_1$.

b) C'est un sous espace vectoriel.

c) C'est aussi un sous espace vectoriel. C'est même une droite vectorielle.

d) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel car $0 \notin F_4$.

e) C'est un sous-espace vectoriel.

Exercice 7.

Soient x et y des vecteurs éléments de $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrez que $E_1 = \{a \cdot x \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrez que $E_2 = \left\{a \cdot x + b \cdot y \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 7

3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. ⚽

Dites si les vecteurs proposés sont colinéaires ou pas.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} + 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \pi - \sqrt{\pi} \\ \pi - 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -42 \\ 30 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

IV Équation et paramétrisation d'une droite affine ou vectorielle.

1 Droites affines.

Exercice 9. ⚽
Donnez des représentations paramétriques des droites suivantes.

a) $\mathscr{D}_1$ passant par $A = \begin{pmatrix} -12 \\ 35 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$.

b) $\mathscr{D}_2$ passant par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) $\mathscr{D}_3$ passant par $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2^3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

d) $\mathscr{D}_4$ passant par $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -434 \end{pmatrix}$.

e) $\mathscr{D}_5$ passant par $A = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

f) $\mathscr{D}_6$ passant par $A = \begin{pmatrix} 76 \\ 435 \\ -986 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -84 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. ☯
On considère les droites, respectivement $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, dont des représentations paramétriques sont

$$\begin{cases} m_1 = -3t + 2 \\ m_2 = 2t - 7 \\ m_3 = 4t + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m_1 = 6t - 4 \\ m_2 = -4t - 3 \\ m_3 = -8t + 9 \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrez que les points $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ appartiennent aux deux droites.
2. Concluez.

Exercice 11.

Exercice 12.

2 Droites vectorielles.

Exercice 13.

3 Représenter une droite de $\mathbb{R}^2$ par une équation.

V Exercices.

Exercice 14.

Justifiez que l'ensemble F est une droite vectorielle en en donnant une représentation paramétrique.

1. $F = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3x_2\right\}$.
2. $F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_3 \text{ et } x_2 = 7x_3\right\}$.

Exercice 15.

Soient $e_1 = (1{,}0{,}0)$ et $e_2 = (0{,}1{,}0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifiez que $F_1 = \{\lambda \cdot e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{\lambda \cdot e_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont des droites vectorielles.
2. Déterminez $F_1 \cap F_2$.

Exercice 16.

Existe-t-il une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1{,}0{,}0)$, $e_2 = (0{,}1{,}0)$ et $e_3 = (0{,}0{,}1)$ qui égale le vecteur nul ? Si oui, Déterminez toutes les combinaisons linéaires qui égalent le vecteur nul.

Exercice 17.

Démontrez que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Il s'agit à chaque fois de droites vectorielles.

1. *Présentation en représentation paramétrique classique.*

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 4t \\ x_2 = -2t \end{array} \right., \, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. *Présentation en représentation paramétrique en ligne.*

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; \exists t \in \mathbb{R},\, x_1 = 7t \text{ et } x_2 = 14t \right\}.$$

3. *Présentation dans laquelle le paramètre de la représentation paramétrique est une des coordonnées, ici x_1.*

$$F = \{ \, x \in \mathbb{R}^3 \;\mid\; x_3 = 2x_1 \in \mathbb{R} \} \, .$$

4. *Présentation dans laquelle les équations paramétriques sont directement écries dans les coordonnées.*

$$F = \{ \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \} \, .$$