Espace $\mathbb{R}^n$.

I Définition de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1

Soient :

. E et F des ensembles,

. x et y deux éléments respectivement de E et F.

On appelle *couple* "x, y" et on note (x,y) l'ensemble $\{x,\{x,y\}\}$.

Remarques.

1. On notera également les couples en colonne : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Proposition 1

Soient x_1, y_1, x_2, y_2 des éléments.

$(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

Démonstration

■

Remarques.

1. Cela signifie en particulier que, en général, $(x,y) \neq (y,x)$: on ne peut intervertir les éléments d'un couple. dans un couple l'ordre compte.

Définition 2

Soient :

. E et F des ensembles.

Nous appellerons *produit cartésien de* E et F l'ensemble que nous noterons $E \times F$ formé de tous les couples (x,y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarques.

1. Si $E = F$ plutôt que d'écrire $E \times E$ nous écrirons E^2.
   De même $E \times E \times E = E^3$.
2. En particulier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ facteurs}}$ est noté $\mathbb{R}^n$.
   Nous conviendrons (c'est donc une notation) que $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ pour des raisons de convenance qui apparaîtrons plus tard.
3. En itérant le procédé nous définirions, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les n-uplets (ou n-listes) : $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ où $x_1 \in E_1$, ..., $x_n \in E_n$.
   L'ensemble des n-uplets est encore appelé produit cartésien et est noté $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Exemples.

1. $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
2. $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples de réels. Il peut être vu comme l'ensemble des coordonnées des points dans un espace affine muni d'un repère cartésien.
3. $\mathbb{R}^2$ peut aussi être vu, et c'est le point de vu que nous retiendrons souvent, comme l'ensemble des vecteurs du plan.
4. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des coordonnées des points de l'espace affine euclidien muni d'un repère.
5. $\mathbb{R}^3$ peut aussi être vu, et c'est le point de vu que nous retiendrons souvent, comme l'ensemble des vecteurs de l'espace.
6. L'univers d'un schéma de Bernoulli de paramètres n et p est $\Omega = \{S,\overline{S}\}^n$ et les issues sont des n-uplets formés de S et de $\overline{S}$.
7. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur (ou égale) à 2 peut être assimilé à $\mathbb{R}^3$: en confondant $aX^2 + bX + c$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Nous approfondirons ces rapprochements dans une leçon ultérieure.

II Des opérations sur $\mathbb{R}^n$.

1 Addition.

Définition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

. $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Nous appellerons *somme des n-uplets* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, le n-uplet définie par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Remarques.

1. Attention de ne pas confondre : ici x et y désigne des n-uplets pas l'abscisse et l'ordonnée.
2. C'est, notamment, pour faciliter ce calcul que nous présenterons les n-uplets en colonnes.
3. Nous avons défini une loi de composition interne à $\mathbb{R}^n$: c'est-à-dire une application qui à deux éléments de $\mathbb{R}^n$ associe un élément de $\mathbb{R}^n$.
4. Pour alléger les écritures un n-uplet sera souvent désigné par une seule lettre : $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exemples.

1. Le n-uplet $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sera noté $0_{\mathbb{R}^n}$ ou même 0 lorsqu'il n'y a pas s'ambiguïté.
2. Dans $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = .$$

3. Dans $\mathbb{R}^3$:
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=.$$

4. Il est possible de mélanger les interprétations affines et vectorielles : $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\11\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\14\\18\end{pmatrix}$ est la somme de deux vecteurs mais c'est aussi une façon de dire que l'image du point $\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$ par la translation de vecteur $\begin{pmatrix}7\\11\\13\end{pmatrix}$ est le point $\begin{pmatrix}9\\14\\18\end{pmatrix}$.

Exercice 1. ⚽

Sommez dans chaque cas.

a) $s_1=\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\-8\\-4\end{pmatrix}$.

b) $s_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1000\\\frac{4}{7}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\428\\-\frac{4}{21}\end{pmatrix}$.

c) $s_3=\begin{pmatrix}2\times10^3\\\pi\\2+8\sqrt{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\times10^4\\-12\pi\\-5-4\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

d) $s_4=\begin{pmatrix}2{,}5\\-0{,}001\\134{,}56\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0{,}25\\-0{,}042\\17\end{pmatrix}$.

Proposition 2

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$.

L'addition des n-uplets est

(i) *commutative* :

$$x + y = y + x.$$

(ii) *associative* :

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

Démonstration

■

Remarques.

1. Le fait que l'addition de n-uplets soit associative permet d'écrire des successions d'additions sans aucune parenthèse : $x + y + z$.

2 Multiplication par un scalaire.

Définition 4

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$,

. $a \in \mathbb{R}$.

Nous appellerons *produit du n-uplet* $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ *par le scalaire a*, le n-uplet définie par

$$a \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \times x_1 \\ a \times x_2 \\ \vdots \\ a \times x_n \end{pmatrix}.$$

Remarques.

1. On peut y voir une distributivité sur chacune des coordonnées.
2. Nous avons défini une loi externe : c'est-à-dire une application qui à un élément de $\mathbb{R}$ et à un élément de $\mathbb{R}^n$ associe un élément de $\mathbb{R}^n$.
3. Remarquons que nous avons défini la multiplication uniquement à gauche nous n'écrions pas $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 2$.

Exemples.

1. Dans $\mathbb{R}^2$:
$$25 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \times 3 \\ 25 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 100 \end{pmatrix}.$$
2. Dans $\mathbb{R}^3$:
$$\frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 32 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \times 4 \\ \frac{3}{4} \times 32 \\ \frac{3}{4} \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 3

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ des éléments de $\mathbb{R}^n$.

. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Le produit de n-uplet par un scalaire

(i) est associatif :
$$(a \times b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x).$$

(ii) assure que chaque n-uplet admet un *opposé* :
$$x + (-1) \cdot x = 0.$$

(iii) est *distributif* sur l'addition des n-uplets :
$$(a + b) \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y.$$

Démonstration

La démonstration consiste à regarder ce qui se passe coordonnée par coordonnée et à utiliser les propriétés des nombres réels.

■

Remarques.

1. Les deux opérations d'addition et de multiplication par un scalaire, et toutes les propriétés énoncées ci-dessus, confèrent à $\mathbb{R}^n$ une structure d'espace vectoriel.

   Autrement dit les n-uplets peuvent être vus comme des vecteurs à part entière. D'ailleurs nous parlerons indifféremment de n-uplet ou de *vecteur*.
2. La troisième propriétés est la classique double distributivité.
3. On a aussi : $a \cdot x = 0 \iff a = 0$ ou $x = 0$.

Exercice 2. ⚽

Résolvez dans $\mathbb{R}^2$ l'équation d'inconnue x :

$$3 \cdot x + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -7 \cdot x - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. ⚽

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Calculez dans $\mathbb{R}^3$ la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 2^k \end{pmatrix}.$$

III Combinaisons linéaires.

1 Combinaison linéaire.

La première partie nous a montré que les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont des vecteurs. C'est pourquoi nous utiliserons dorénavant indifféremment les expressions n-uplet et vecteur.

Nous allons maintenant nous tourner vers l'outil indispensable pour travailler avec des vecteurs : la combinaison linéaire.

Définition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$,

. $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Nous appellerons *combinaison linéaire* des vecteurs x et y tout vecteur de la forme

$$a \cdot x + b \cdot y.$$

Remarques.

1. On définirait de la même façon des combinaisons linéaires de 3 ou 4 vecteurs.
2. Nous pouvons remarquer que tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En effet :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. De même tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut être écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemples.

1. Le vecteur $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminons des réels a et b de sorte que $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   L'égalité vectorielle équivaut au système de deux équations :

$$\left\{ \begin{array}{rrcr} 2a & -3b & = & 5 \\ -3a & +5b & = & -2 \end{array} \right.$$

En multipliant la deuxième ligne par -1 ($L_2 \leftarrow -1 \cdot L_2$) puis en intervertissant les deux lignes ($L_1 \leftrightarrow L_2$) :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3a & -5b & = & 2 \\ 2a & -3b & = & 5 \end{array}\right.$$

En soustrayant la seconde ligne à la première ($L_1 \leftarrow L_1 - L_2$) :

$$\left\{\begin{array}{rrcr} a & -2b & = & -3 \\ 2a & -3b & = & 5 \end{array}\right.$$

En faisant : $L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} a & -2b & = & -3 \\ & b & = & 11 \end{array}\right.$$

Puis avec : $L_1 \leftrightarrow L_1 + 2L_2$

$$\left\{\begin{array}{rrcr} a & & = & 19 \\ & b & = & 11 \end{array}\right.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{il n'y a qu'un seul couple de réels qui convienne } (a,b) = (19,11).}$$

Exercice 4.

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les combinaisons suivantes soient nulles.

a) $a \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \end{pmatrix}$. b) $a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}$. c) $a \cdot \begin{pmatrix} -16 \\ 50 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \end{pmatrix}$.

d) $a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4

a)

$$\left\{\begin{array}{rrcr} a & -7b & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

Pour chaque valeur de b une valeur de a convient il y a une infinité de solutions : $(a,b) = (7,1)$ convient.

b)

$$\begin{cases} 3a & -2b & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{cases}$$

Pour chaque valeur de b une valeur de a convient il y a une infinité de solutions : $(a,b) = (2,3)$ convient.

c)

$$\begin{cases} a & & = & 0 \\ & b & = & 0 \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = (0,0)$.

d)

$$\begin{cases} a & & = & 0 \\ & b & = & 0 \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = (0,0)$.

Exercice 5.

Trouvez si possible des nombres a et b de sorte que les égalités soient vérifiées.

a) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) $a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

c) $a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$.

d) $a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 25 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 5

a)

$$\begin{cases} a & & = & \frac{11}{5} \\ & b & = & \frac{29}{5} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = \left(\frac{11}{5}, \frac{29}{5}\right)$.

b)

$$\begin{cases} a & & = & \frac{29}{3} \\ & b & = & \frac{28}{3} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = \left(\frac{29}{3}, \frac{28}{3}\right)$.

c)

$$\begin{cases} a & & = & -\frac{37}{10} \\ & b & = & -\frac{13}{5} \end{cases}$$

Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = \left(-\frac{37}{10}, -\frac{13}{5}\right)$.

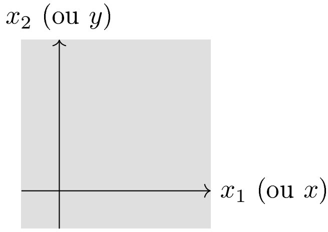
d)

$$\begin{cases} a & & = & -7 \\ & b & = & 5 \end{cases}$$

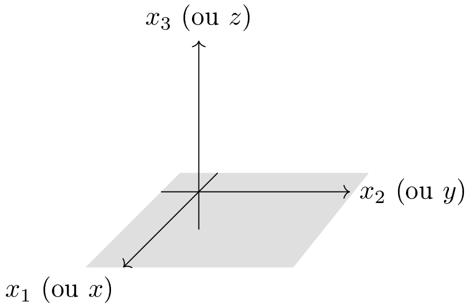
Il n'y a qu'un couple qui convienne : $(a,b) = (-7,5)$.

2 Sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Nous représentons habituellement $\mathbb{R}^2$ par un repère avec axes des abscisses et axe des ordonnées :



Lorsque nous représentons $\mathbb{R}^3$ par un repère nous retrouvons le repère de $\mathbb{R}^2$:



Cela permet de conjecturer que l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ contient d'autres espaces vectoriels comme $\mathbb{R}^2$.

Définition 6

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$.

Nous dirons qu'un ensemble F est *un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$ s'il satisfait les conditions suivantes :

(i) $F \subset \mathbb{R}^n$,

(ii) F est non vide,

(iii) F est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (x,y) \in F^2,\ a \cdot x + b \cdot y \in F.$$

Remarques.

1. La stabilité par combinaison linéaire signifie qu'il est impossible, en utilisant des combinaisons linéaires d'éléments de F, d'obtenir un vecteur qui ne soit pas dans cet ensemble.
   La somme de deux vecteurs du plan affine reste un vecteur de ce plan.
2. Tous les sous-espace vectoriels contiennent à minima le vecteur nul, c'est pourquoi pour montrer que F est non vide on s'assure que $0_{\mathbb{R}^n} \in F$.
   La contraposée sera très intéressante : si $0 \notin F$ alors F n'est pas un sous-espace vectoriel.
3. Pour s'assurer de la stabilité par combinaison linéaire il suffit de vérifier que :
$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in F^2,\ a \cdot x + y \in F.$$
4. Ces critères sont à connaître par cœur. Nous verrons plus tard d'autre façons de vérifier qu'une partie est un sous-espace vectoriel.
5. Le sous-espace vectoriel possède des propriétés semblables à celle de $\mathbb{R}^n$.

Exemples.

1. Montrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2r - s + 3t = 0 \right\}$ est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. ♥ $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et $\mathbb{R}^n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   $F = \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ que nous appellerons *une droite vectorielle*.
4. Montrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Si $0 \in F$ alors en particulier $1 = 0$ ce qui est impossible donc $0 \notin F$.
$$\boxed{F \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel.}}$$
5. Montrons que $F = \left\{ \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous espace-vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(i) Clairement $F \subset \mathbb{R}^n$.

(ii) Si $\lambda = 0$ alors $\begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Donc $0 \in F$.

(iii) Soient $(x,y) \in F^2$ et $a \in \mathbb{R}$.

Si $x \in F$ alors il existe λ_x un réel tel que : $x = \begin{pmatrix} -2\lambda_x \\ \lambda_x \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même si $y \in F$ alors il existe $\lambda_y \in \mathbb{R}$ tel que : $y = \begin{pmatrix} -2\lambda_y \\ \lambda_y \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que $a \cdot x + y \in F$.

$$\begin{aligned} a \cdot x + y &= \begin{pmatrix} -2\lambda_x - 2\lambda_y \\ \lambda_x + \lambda_y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2(\lambda_x + \lambda_y) \\ \lambda_x + \lambda_y \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En notant $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$ on a bien :

$$a \cdot x + y = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Autrement dit $a \cdot x + y \in F$.

Nous avons établi que F est stable par combinaison linaires.

Des trois points précédents nous déduisons que

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

6. $F = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui correspond à $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6.

Dites si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

a) $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r - s = 0 \text{ et } s + t = 0 \right\}$.

b) $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

c) $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$.

d) $F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; r + s + t = 1 \right\}$.

e) $F_5 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2r + 3s = 0 \right\}$.

Correction de l'exercice 6

a)

$$(ax_1 + y_1) - (ax_2 + y_2) = a(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$$

Or $x \in F_1$ donc $x_1 - x_2 = 0$ et $y \in F_1$ donc $y_1 - y_2 = 0$, d'où

$$(ax_1 + y_1) - (ax_2 + y_2) = 0$$

De même

$$(ax_2 + y_2) + (ax_3 + y_3) = a(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)$$

Or $x \in F_1$ donc $x_2 + x_3 = 0$ et $y \in F_1$ donc $y_2 + y_3 = 0$, d'où

$$(ax_2 + y_2) + (ax_3 + y_3) = 0$$

Ainsi : $a \cdot x + y \in F_1$.

b) C'est un sous espace vectoriel.

c) C'est aussi un sous espace vectoriel. C'est même une droite vectorielle.

d) Ce n'est pas un sous-espace vectoriel car $0 \notin F_4$.

e) C'est un sous-espace vectoriel.

Exercice 7.

Soient x et y des vecteurs éléments de $\mathbb{R}^2$.

1. Démontrez que $E_1 = \{a \cdot x \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrez que $E_2 = \left\{a \cdot x + b \cdot y \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Correction de l'exercice 7

3 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.

Définition 7

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $(x,y) \in \left(\mathbb{R}^n\right)^2$.

x et y sont dits *colinéaires* si et seulement si il existe un nombre réel a tel que

$$x = a \cdot y \quad \text{ou} \quad y = a \cdot x$$

Remarques.

1. Dire qu'ils sont colinéaires c'est dire qu'il représentent la même ligne, la même direction. Autrement dit ils sont vecteurs directeurs des mêmes droites affines.
2. Nous verrons une notion qui généralise celle-ci. Des vecteurs seront dit liés s'il existe une combinaison linaire $a \cdot x + b \cdot y = 0$ dont les coefficients a et b ne sont pas tous nuls.
3. La colinéarité est une sorte de proportionnalité.

Exemples.

1. $0 \in \mathbb{R}^n$ est colinéaire à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ puisque, si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $0 = 0 \cdot x$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $e \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
   La droite vectorielle $F = \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$ est formée de l'ensemble des vecteurs colinéaires à e.
3. $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 24 \\ -16 \end{pmatrix}$ sont colinéaires car $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 24 \\ -16 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 12 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}$ sont colinéaires car

12	-4
$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$

est un tableau de proportionnalité comme le prouve le produit en croix : $12 \times \frac{1}{9} - \left(-\frac{1}{3}\right) \times (-4) = 0$.

5. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires car s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $a = \frac{1}{2}$ et $a = 2$. Ce qui est impossible.

6. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -7{,}5 \\ 6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 7 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\begin{pmatrix} 17 \\ 17 \\ \vdots \\ 17 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. ⚽

Dites si les vecteurs proposés sont colinéaires ou pas.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ \sqrt{\pi} + 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \pi - \sqrt{\pi} \\ \pi - 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7{,}2 \\ -42 \\ 30 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 4 - Classification des sous-espaces vectorielles de $\mathbb{R}^2$.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

F vérifie l'une des trois situations qui s'excluent mutuellement :

(i) $F = \{0\}$,

(ii) Il existe $e \in \mathbb{R}^2$ tel que $F = \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(iii) $F = \mathbb{R}^2$.

Démonstration

* Nous avons déjà remarqué que $\{0\}$ est un espace de $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc, en particulier, de $\mathbb{R}^2$.
* Si $F \neq \{0\}$ alors il existe $e \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que $e \in F$.
  Comme nous l'avons déjà remarqué $\{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
  Deux cas sont alors possibles.
  - Premier cas : $F = \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$.
  - Second cas : $F \neq \{a \cdot e \mid a \in \mathbb{R}\}$.
    Ce qui signifie qu'il existe un vecteur $f \in F$ et qui n'est pas colinéaire à e.
    Nous allons démontrer que, dans ce cas, tout vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de e et f. Ce qui établira que $\mathbb{R}^2 \subset F$.
    Notons $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ et $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$.
    $x = a \cdot e + b \cdot f$ avec
    $$a = \frac{x_1}{e_1} - \frac{f_1}{e_1} \times \frac{e_1 x_2 - x_1 e_2}{f_2 e_1 - f_1 e_2}$$
    et
    $$b = \frac{e_1 x_2 - x_1 e_2}{f_2 e_1 - f_1 e_2}$$
    et ces deux nombres ont du sens puisque $e \neq 0$ et e et f ne sont pas colinéaires.

■

Remarques.

1. Ainsi les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\mathbb{R}^2$ tout entier, l'espace réduit à 0 et des droites vectorielles.

Exemples.

1. En admettant que $F = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (u_1 - 1)(u_1 + 1) \geqslant -1 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ précisez F.

   Démontrons que $F = \mathbb{R}^2$.

   (a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$ car $(1-1)(1+1) = 0 \geqslant -1$. Donc $F \neq \{0\}$.

   (b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in F$ car $(0-1)(0+1) = -1 \geqslant 0$.

   (c) De plus $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont linéairement indépendants puisque $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

   Ainsi F contient deux vecteurs non nuls et non colinéaires donc, nécessairement :

$$\boxed{F = \mathbb{R}^2.}$$

IV Équation et paramétrisation d'une droite affine ou vectorielle.

1 Droites affines.

Rappelons qu'un n-uplet peut être vu comme un point ou comme un vecteur. Dans cette partie nous utiliserons ces deux interprétations simultanément.

Définition 8

Soient :

. $n \in \mathbb{N}$,

. $A(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux points de $\mathbb{R}^n$.

Nous noterons $\overrightarrow{AB}$ et nous dirons « vecteur A, B », le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$\overrightarrow{AB} := \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Exemples.

1. Si $A(2,3,5)$ et $B(4,-2,8)$ alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Définition 9

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $A(a_1,a_2,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $B(b_1,b_2,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$ deux points distincts de $\mathbb{R}^n$.

Nous appellerons *droite affine* (AB) l'ensemble

$$(AB) := \left\{ M \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \right\}.$$

Remarques.

1. $A \in (AB)$ et $B \in (AB)$.

Proposition 5

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$.

$\mathscr{D}$ est une droite affine de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe un point $A \in \mathbb{R}^n$ et un vecteur $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tels que :

$$\mathscr{D} = \left\{ A + \lambda \cdot u \in \mathbb{R}^n \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans ce cas nous dirons que u est un *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$.

Remarques.

1. En particulier $A \in \mathscr{D}$.
2. On notera éventuellement $\mathscr{D} = A + \mathbb{R} \cdot u$.
3. Autrement dit une droite affine est entièrement définie par la donnée de l'un de ses points et d'un vecteur non nul.
4. Il n'y a pas unicité du vecteur directeur puisque tout vecteur colinéaire à u est aussi un vecteur directeur.
5. L'ensemble des vecteurs directeurs de la droite affine $\mathscr{D}$ est :

$$\{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Nous reconnaissons une droite vectorielle. Nous dirons que cette droite vectorielle est *la direction* de la droite affine $\mathscr{D}$.

Proposition 6

Soient :
. $n \in \mathbb{N}^*$,
. $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$,
. $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un point de $\mathbb{R}^n$,
. $\mathscr{D}$ la droite affine passant par A et de vecteur directeur u.

$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_1 & = & u_1 \times t + a_1 \\ m_2 & = & u_2 \times t + a_2 \\ & \vdots & \\ m_n & = & u_n \times t + a_n \end{array}\right.$$

Remarques.

1. Le système de n équations qui caractérise la droite affine est appelé *une paramétrisation* de la droite affine.
2. La paramétrisation n'est pas unique puisqu'elle dépend du choix de A et de u.

Exemples.

1. La droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^1$ passant par $A = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ (ici un point est un nombre) et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix}-3\end{pmatrix}$ (et il en est de même pour un vecteur).
$M \in \mathscr{D}$ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M = -3t + 1$.
2. La droite $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$ passant par $A\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$ admet pour paramétrisation :

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 = -t - 3 \\ m_2 = -2t + 7 \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}$$

3.
4.

Exercice 9. ⚽

Donnez des représentations paramétriques des droites suivantes.

a) $\mathscr{D}_1$ passant par $A = \begin{pmatrix} -12 \\ 35 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$.

b) $\mathscr{D}_2$ passant par $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

c) $\mathscr{D}_3$ passant par $A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 2^3 \\ 7 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

d) $\mathscr{D}_4$ passant par $A = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \\ -2 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -434 \end{pmatrix}$.

e) $\mathscr{D}_5$ passant par $A = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

f) $\mathscr{D}_6$ passant par $A = \begin{pmatrix} 76 \\ 435 \\ -986 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -84 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 10. ☯

On considère les droites, respectivement $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, dont des représentations paramétriques sont

$$\begin{cases} m_1 = -3t + 2 \\ m_2 = 2t - 7 \\ m_3 = 4t + 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m_1 = 6t - 4 \\ m_2 = -4t - 3 \\ m_3 = -8t + 9 \end{cases}$$

où $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrez que les points $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$ appartiennent aux deux droites.

2. Concluez.

Exercice 11.

Exercice 12.

2 Droites vectorielles.

Comme nous l'avons indiqué :

Définition 10

Soient :

. $n \in \mathbb{N}^*$,

. $D \subset \mathbb{R}^n$.

Nous dirons que D est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe un vecteur $u \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que :

$$D = \{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Remarques.

1. Une droite vectorielle est une droite affine qu'on aurait détachée de son point A et qui serait donc mouvante (comme un vecteur).
2. Toute droite vectorielle peut être vue comme une droite affine passant par le point $(0,0,\ldots,0)$. Nous aurons en particulier la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} m_1 = u_1 \times t \\ m_2 = u_2 \times t \\ \vdots \\ m_n = u_n \times t \end{cases}$$

3. On peut faire un parallèle entre droites vectorielle et affine d'une part et fonctions linéaire et affine d'autre part.
4. Une droite vectorielle représente la direction d'une infinité de droites affines.
5. On notera éventuellement $D = \mathbb{R} \cdot u$.
6. Plutôt que de parler de vecteur directeur comme pour les fonctions affines,nous dirons que u est une base de la droite vectorielle.

Proposition 7

Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^n$ en est un sous-espace vectoriel.

Exercice 13.

3 Représenter une droite de $\mathbb{R}^2$ par une équation.

Cette partie est traitée en soutien.

V Exercices.

Exercice 14.

Justifiez que l'ensemble F est une droite vectorielle en en donnant une représentation paramétrique.

1. $F = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 3x_2\right\}$.
2. $F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_3 \text{ et } x_2 = 7x_3\right\}$.

Exercice 15.

Soient $e_1 = (1{,}0{,}0)$ et $e_2 = (0{,}1{,}0)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Justifiez que $F_1 = \{\lambda \cdot e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $F_2 = \{\lambda \cdot e_2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ sont des droites vectorielles.
2. Déterminez $F_1 \cap F_2$.

Exercice 16.

Existe-t-il une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1{,}0{,}0)$, $e_2 = (0{,}1{,}0)$ et $e_3 = (0{,}0{,}1)$ qui égale le vecteur nul ? Si oui, Déterminez toutes les combinaisons linéaires qui égalent le vecteur nul.

Exercice 17.

Démontrez que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
Il s'agit à chaque fois de droites vectorielles.

1. *Présentation en représentation paramétrique classique.*
$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x_1 = 4t \\ x_2 = -2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}\right\}.$$
2. *Présentation en représentation paramétrique en ligne.*
$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R},\, x_1 = 7t \text{ et } x_2 = 14t\right\}.$$
3. *Présentation dans laquelle le paramètre de la représentation paramétrique est une des coordonnées, ici x_1.*
$$F = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 2x_1 \in \mathbb{R}\}.$$
4. *Présentation dans laquelle les équations paramétriques sont directement écries dans les coordonnées.*
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -3t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\right\}.$$