Généralités sur les suites.

I Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques.

1 Suite arithmétiques.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est dite arithmétique si et seulement si il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Formules explicites.

Si la suite commence au rang 0 (c'est-à-dire $(u_n)_{n \geqslant 0}$) alors

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = u_0 + nr.$$

Si la suite commence au rang p (c'est-à-dire $(u_n)_{n \geqslant p}$) alors

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = u_p + (n-p)r.$$

Proposition 1 - Somme des termes d'une suite arithmétique.

Si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}.$$

Démonstration

Notons $\mathscr{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$ ».

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

* D'une part :

$$\sum_{k=0}^{0} u_0 = u_0$$

et d'autre part

$$\frac{u_0 + u_0)(n+1)}{2} = \frac{2u_0}{2} = u_0,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{0} u_0 = \frac{u_0 + u_0)(n+1)}{2}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors vraie.
Nous voulons établir une égalité au rang $n+1$. Pour démontrer une égalité $A = B$ on peut partir de A ou de B. Ici nous partons de B. Autrement dit nous partons de $\frac{(u_0+u_{n+1})((n+1)+1)}{2}$ et nous allons montré que c'est égale à $\sum k = 0^{n+1} u_k$.
Puisque (u_n) est arithmétique, en notant r sa raison :

$$\frac{(u_0 + u_{n+1})((n+1)+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_n + r)((n+1)+1)}{2}$$

En développant :

$$\begin{aligned}\frac{(u_0 + u_{n+1})((n+1)+1)}{2} &= \frac{(u_0+u_n)(n+1) + r(n+1) + u_0 + u_n + r}{2} \\ &= \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2} + \frac{r(n+1) + u_0 + u_n + r}{2}\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\frac{(u_0 + u_{n+1})((n+1)+1)}{2} &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \frac{r(n+1) + u_0 + u_n + r}{2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \frac{u_{n+1} + u_{n+1}}{2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}.$$

■

2 Suites géométriques.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est dite géométrique si et seulement si il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Formules explicites.
Si la suite commence au rang 0 (c'est-à-dire $(u_n)_{n\geqslant 0}$) alors

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = u_0 \times q^n.$$

Si la suite commence au rang p (c'est-à-dire $(u_n)_{n\geqslant p}$) alors

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Proposition 2 - Somme des termes d'une suite arithmétique.

Si $q \in [0, +\infty[\setminus\{1\}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

II Variations.

1 Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 1.
Étudiez le sens de variation de la suite u dans les cas suivants.

1. Pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + 5$.
2. $u_n = n + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_{n+1} = u_n - n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$.
4. $u_n = n^2 - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = n^2 - 5n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 3^n - 5$.
7. $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$.
8. $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{u_n}$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 8$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 0{,}5^n$.
11. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 1$.
12. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
13. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
14. $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \sqrt{u_n^2 + 3}$.

2 Suites strictement positives, étude de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 2.

Étudiez les variations des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = 3^{2n^2+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = \dfrac{3^n \times 2^{n+1}}{3^{2n} \times 2^n}$.

3 Suites définies par une formule explicite.

Exercice 3.

Étudiez la monotonie des suites suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n + 13$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 2n - 4$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 + \frac{9}{2}n^2 + 6n$.

III Exercices.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}9u_n + 90 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$$

1. Calculez $u_1$et u_2.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par $v_n = u_n - 900$.
   (a) Calculez v_0 et v_1.
   (b) Montrez que pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Écrivez v_n en fonction de n.
3. Déduisez-en pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 100 \times 0{,}9^n + 900$.
4. Déterminez à l'aide la calculatrice de la valeur de laquelle semble se rapprocher u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. À partir de quel nombre entier n a-t-on $u_n \leqslant 901$?

Exercice 5.

Soient $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_n = -n^2 + 2n \quad \text{et} \quad S_n = w_{n+1} - w_n.$$

1. Exprimez w_{n+1} en fonction de n.
2. Déduisez-en l'expression de S_n en fonction de n.
3. Exprimez S_{n+1} en fonction de n.
4. Déduisez-en que $S_{n+1} - S_n = -2$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifiez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrez que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est une suite arithmétique.
3. Donnez l'expression du terme général v_n en fonction de n.
4. Déduisez-en l'expression de u_n en fonction de n.
5. Trouvez la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 50$.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

1. Calculez u_2 et u_3.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
3. On suppose que pour tour entier naturel n, $u_n \neq 0$ et on définie la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) Montrez que la suite (v_n) est arithmétique et donnez ses éléments caractéristiques.
   (b) Donnez l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Donnez l'expression de u_n en fonction de n.
4. Étudiez la monotonie de la suite (u_n).
5. Montrez que pour tour n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. De quelle façon est définie la suite (u_n) ?
2. Donnez l'expression de la fonction f telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Représentez graphiquement la fonction f, puis représentez les cinq premiers termes de la suite sur ce graphique.
4. Que pouvez-vous conjecturer quant aux variations de cette suite ?
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n, par $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-2}$. Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
6. Déduisez-en v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

Exercice 9.

1. On considère le nombre B dont l'écriture décimale illimitée est $0{,}375\,375\,375\ldots$ où 375 est répété indéfiniment. Le nombre B est-il rationnel ? Justifiez votre réponse.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $u_1 = 0{,}375$ et $u_{n+1} = 10^{-3}u_n$ pour tout entier n.
   (a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   (b) On considère pour tout entier naturel n, la somme S_n des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.
   Exprimez S_n en fonction de n.
3. Conjecturez la valeur de $\lim_{n\to+\infty} 10^{-3n}$.
4. Déduisez-en $\lim_{n\to+\infty} S_n$. Que représente ce nombre par rapport à B ?