Généralités sur les suites.

I Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques.

1 Suite arithmétiques.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n \geqslant p}$ est dite arithmétique si et seulement si il existe un nombre $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Formules explicites.

Si la suite commence au rang 0 (c'est-à-dire $(u_n)_{n \geqslant 0}$) alors

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = u_0 + nr.$$

Si la suite commence au rang p (c'est-à-dire $(u_n)_{n \geqslant p}$) alors

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = u_p + (n-p)r.$$

Proposition 1 - Somme des termes d'une suite arithmétique.

Si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}.$$

Démonstration

Notons $\mathscr{P}(n)$: « $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0+u_n)(n+1)}{2}$ ».

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

* D'une part :

$$\sum_{k=0}^{0} u_0 = u_0$$

et d'autre part

$$\frac{u_0 + u_0)(n+1)}{2} = \frac{2u_0}{2} = u_0,$$

donc

$$\sum_{k=0}^{0} u_0 = \frac{u_0 + u_0)(n+1)}{2}.$$

Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

* Soit $n \in \mathbb{N}$.
  Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est alors vraie.
  Nous voulons établir une égalité au rang $n+1$. Pour démontrer une égalité $A = B$ on peut partir de A ou de B. Ici nous partons de B. Autrement dit nous partons de $\frac{(u_0+u_{n+1})((n+1)+1)}{2}$ et nous allons montré que c'est égale à $\sum k = 0^{n+1} u_k$.
  Puisque (u_n) est arithmétique, en notant r sa raison :

$$\frac{(u_0 + u_{n+1})((n+1)+1)}{2} = \frac{(u_0 + u_n + r)((n+1)+1)}{2}$$

En développant :

$$\begin{aligned}\frac{(u_0 + u_{n+1})((n+1)+1)}{2} &= \frac{(u_0 + u_n)(n+1) + r(n+1) + u_0 + u_n + r}{2} \\ &= \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2} + \frac{r(n+1) + u_0 + u_n + r}{2}\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}\frac{(u_0 + u_{n+1})((n+1)+1)}{2} &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \frac{r(n+1) + u_0 + u_n + r}{2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + \frac{u_{n+1} + u_{n+1}}{2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + u_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

* Nous avons démontré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}.$$

■

2 Suites géométriques.

Soit $p \in \mathbb{N}$.

Une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est dite géométrique si et seulement si il existe un nombre $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \geqslant p,\ u_{n+1} = u_n \times q.$$

Formules explicites.
Si la suite commence au rang 0 (c'est-à-dire $(u_n)_{n\geqslant 0}$) alors

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = u_0 \times q^n.$$

Si la suite commence au rang p (c'est-à-dire $(u_n)_{n\geqslant p}$) alors

$$\forall n \geqslant p,\ u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Proposition 2 - Somme des termes d'une suite arithmétique.

Si $q \in [0, +\infty[\setminus\{1\}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

II Variations.

1 Étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 1.

Étudiez le sens de variation de la suite u dans les cas suivants.

1. Pour tout $n \geqslant 3$, $u_{n+1} = u_n + 5$.
2. $u_n = n + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_{n+1} = u_n - n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 2$.
4. $u_n = n^2 - 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. $u_n = n^2 - 5n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 3^n - 5$.
7. $u_0 = -5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + n^2$.
8. $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n}$.
9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 8$.
10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 + 0{,}5^n$.
11. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n^2 - n + 1$.
12. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
13. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.
14. $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \sqrt{u_n^2 + 3}$.

Correction de l'exercice 1

1. $u_{n+1} - u_n = 5 > 0$ donc(u_n) est strictement croissante.
2.
$$u_{n+1} - u_n = (n+1) + \frac{1}{(n+1)+1} - \left(n + \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$$

   Donc (u_n) est strictement croissante.
3. $u_{n+1} - u_n = -n - 1 < 0$ donc (u_n) est strictement décroissante.
4.
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4 - \left(n^2 - 4\right)$$
$$= 2n + 1 > 0$$

   Donc (u_n) est strictement croissante.
5.
$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 5(n+1) + 1 - \left(n^2 - 5n + 1\right)$$
$$= 2n - 4$$

   On remarque $u_1 - u_0 = 2 \times 0 - 4 = -2 < 0$ et $u_4 - u_3 = 2 \times 3 - 4 = 2 > 0$ donc (u_n) n'est pas monotone.
6.
$$u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 5 - \left(3^n - 5\right)$$
$$= 3 \times 3^n - 3^n$$
$$= 3^n(3 - 1) > 0$$

   Donc (u_n) est strictement croissante.
7. $u_{n+1} - u_n = n^2 \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.
8. On remarque $u_0 = 3$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 3$ donc (u_n) n'est pas monotone.
9.
$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 8 - \left(2^n - 8\right)$$
$$= 2^n(2 - 1) > 0$$

   donc (u_n) est strictement croissante.
10.
$$u_{n+1} - u_n = 1 + 0{,}5^{n+1} - \left(1 + 0{,}5^n\right)$$
$$= 0{,}5^n(0{,}5 - 1) < 0$$

    donc (u_n) est strictement décroissante.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \left[2(n+1)^2 - (n+1) + 1\right] - \left[2n^2 - n + 1\right] \\
&= 2(n+1)^2 - (n+1) + 1 - 2n^2 + n - 1 \\
&= 2(n+1)^2 - (n+1) - 2n^1 + n \\
&= 2\left(n^2 + 2n + 1\right) - n - 1 - 2n^2 + n \\
&= 2n^2 + 4n + 2 - 1 - 2n^2 \\
&= 4n + 1
\end{aligned}$$

Or $4n + 1 > 0$ puisque $n \geqslant 0$, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.
Ainsi nous avons établi que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$. Autrement dit :

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

12.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1-2}{2^{n+1}} \\
&= -\frac{1}{2^{n+1}} \\
&< 0
\end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

13.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 2n + 3 \\
&> 0
\end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

14.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= -\sqrt{u_n^2 + 3} \\
&< 0
\end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2 Suites strictement positives, étude de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 2.

Étudiez les variations des suites suivantes.

1. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. $u_n = 3^{2n^2+1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. $u_n = \dfrac{3^n \times 2^{n+1}}{3^{2n} \times 2^n}$.

Correction de l'exercice 2

1.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{(n+1)}{(n+1)+1}}{\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \times \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} > 1\end{aligned}$$

donc (u_n) est strictement croissante.

2.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{2(n+1)^2+1}}{3^{2n^2+1}} \\ &= 3^{2(n+1)^2+1-(2n^2+1)} \\ &= 3^{4n+2}\end{aligned}$$

Comme $4n+2 > 0$, $3^{4n+2} > 1$ donc (u_n) est strictement croissante.

3.

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{3^{n+1} \times 2^{(n+1)+1}}{3^{2(n+1)} \times 2^{n+1}} \times \frac{3^{2n} \times 2^n}{3^n \times 2^{n+1}} \\ &= \frac{3^n \times 3 \times 2^{n+1} \times 2 \times 3^{2n} \times 2^n}{3^{2n} \times 3^2 \times 2^{n+1} \times 3^n \times 2^n \times 2} \\ &= \frac{1}{3} < 1\end{aligned}$$

donc (u_n) est strictement décroissante.

3 Suites définies par une formule explicite.

Exercice 3.

Étudiez la monotonie des suites suivantes.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 + n + 13$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2 - 2n - 4$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^3 + \frac{9}{2}n^2 + 6n$.

Correction de l'exercice 3

1. $x^2 + x + 13 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{51}{4}$.
   On pouvait aussi faire : $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\times 1} = -\frac{1}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 13 = \frac{51}{4}$.
   Dans les deux cas nous en déduisons les variations de la fonction polynomiale de degré deux puisque $a = 1 > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{51}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

   En particulier sur $\mathbb{R}_+$ la fonction est strictement croissante donc (u_n) est strictement croissante.

2. $u_0 = -4$, $u_1 = -5$ et $u_2 = -4$ donc (u_n) n'est pas monotone.
3. $f : x \mapsto x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x$ est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 3x^2 + 9x + 6$$

   -1 est racine évidente de f' donc l'autre racine de ce trinôme est $\frac{6}{-1\times 3} = -2$. Comme de plus $a > 0$:

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   Sur $\mathbb{R}_+$ f est strictement croissante donc (u_n) est strictement croissante.

III Exercices.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}9u_n + 90 \\ u_0 = 1000 \end{cases}$$

1. Calculez $u_1$et u_2.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout nombre entier naturel n par

$$v_n = u_n - 900.$$

   (a) Calculez v_0 et v_1.
   (b) Montrez que pour tout nombre entier naturel n, $v_{n+1} = 0{,}9v_n$.
   (c) Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Écrivez v_n en fonction de n.
3. Déduisez-en pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 100 \times 0{,}9^n + 900$.
4. Conjecturez la valeur dont semble se rapprocher u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction de l'exercice 4

1. $u_1 = 990$, $u_2 = 981$.
2. (a) $v_0 = 90$, $v_1 = 81$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 900 \\ &= 0{,}9u_n + 90 - 900 \\ &= 0{,}9u_n - 810 \\ &= 0{,}9u_n - 0{,}9 \times 900 \\ &= 0{,}9\left(u_n - 900\right) \\ &= 0{,}9v_n \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = 0{,}9v_n.}$$

   (c) D'après la question précédente

$$\boxed{(v_n) \text{ est géométrique de raison } q = 0{,}9 \text{ et de terme initial } v_0 = 90.}$$

   On en déduit sa formule explicite, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0 \times q^n$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 90 \times 0{,}9^n.}$$

3.

$$\begin{aligned} u_n &= v_n + 900 \\ &= 90 \times 0{,}9^n + 900 \end{aligned}$$

4. $(0{,}9^n)_{n \geqslant 0}$ tend vers 0 donc u_n tend vers 900 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5.

Soient $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_n = -n^2 + 2n \quad \text{et} \quad S_n = w_{n+1} - w_n.$$

1. Exprimez w_{n+1} en fonction de n.
2. Déduisez-en l'expression de S_n en fonction de n.
3. Exprimez S_{n+1} en fonction de n.
4. Déduisez-en que $S_{n+1} - S_n = -2$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 5

1.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= -(n+1)^2 + 2(n+1) \\ &= -(n^2 + 2n + 1) + 2n + 2 \\ &= -n^2 - 2n - 1 + 2n + 2 \\ &= -n^2 + 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} S_n &= w_{n+1} - w_n \\ &= -n^2 + 1 - \left(-n^2 + 2n\right) \\ &= -n^2 + 1 + n^2 - 2n \\ &= -2n + 1 \end{aligned}$$

Dès ici nous remarquons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de terme initial $S_0 = 1$ et de raison -2. Ce qui répond aux questions suivantes.

Exercice 6.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifiez que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrez que la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2$ est une suite arithmétique.
3. Donnez l'expression du terme général v_n en fonction de n.
4. Déduisez-en l'expression de u_n en fonction de n.
5. Trouvez la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 50$.

Correction de l'exercice 6

1. $u_n^2 + 3 \geqslant 0$.
2. $v_{n+1} = u_{n+1}^2 = u_n^2 + 3 = v_n + 3$.
3. $v_n = -1 + 3n$.
4. $u_n = \sqrt{-1 + 3n}$ si $n \geqslant 1$ et $u_0 = -1$.
5. $u_n > 50$ donc $-1 + 3n \geqslant 2500$ et $n \geqslant \frac{2500-1}{3} = 833$.

Exercice 7.

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2 + 3u_n}$.

1. Calculez u_2 et u_3.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique ?
3. On suppose que pour tour entier naturel n, $u_n \neq 0$ et on définie la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) Montrez que la suite (v_n) est arithmétique et donnez ses éléments caractéristiques.
   (b) Donnez l'expression de v_n en fonction de n.
   (c) Donnez l'expression de u_n en fonction de n.
4. Étudiez la monotonie de la suite (u_n).
5. Montrez que pour tour n de $\mathbb{N}$, $0 < u_n \leqslant 1$.

Correction de l'exercice 7

1.
$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0}{2+3u_0} \\ &= \frac{2\times 1}{2+3\times 1} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

   De même

$$u_2 = \frac{1}{4}$$
$$u_3 = \frac{2}{11}$$

2. $u_2 - u_1 = -\frac{3}{20}$ et $u_3 - u_2 = -\frac{3}{44}$ donc pas arithmétique.
3. (a) $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{2+3u_{n+1}}{2u_{n+1}}$
   $v_{n+1} - v_n = \frac{2+3u_n}{2u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2+3u_n-2}{2u_n} = \frac{3}{2}$. $r = \frac{3}{2}$ et $u_0 = 1$
   (b) $v_n = 1 + \frac{3}{2}n$.
   (c) $u_n = \frac{1}{1+\frac{3}{2}n}$.
4. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1+\frac{3}{2}n}{1+\frac{3}{2}(n+1)} < 1$. Donc strictement décroissante.
5. $u_n > 0$ par formule explicite et $u_n \leqslant 1$ par monotonie.

Exercice 8.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{u_n + 3} \text{ et } u_0 = 1.$$

1. De quelle façon est définie la suite (u_n) ?
2. Donnez l'expression de la fonction f telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. Représentez graphiquement la fonction f, puis représentez les cinq premiers termes de la suite sur ce graphique.
4. Que pouvez-vous conjecturer quant aux variations de cette suite ?
5. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n, par $v_n = \frac{u_n+2}{u_n-2}$. Montrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
6. Déduisez-en v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.

Correction de l'exercice 8

1. Par récurrence.
2. $f : x \mapsto \frac{3x+4}{x+3}$.
3. $f'(x) = \frac{5}{(x+3)^2}$ donc

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f'	$+$	‖	$+$
f	$3 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 3$

En ajoutant quelques images simples à calculer de tête on obtient un assez bon schéma : $f(0) = \frac{4}{3}$, $f\left(-\frac{4}{3}\right) = 0$, $f(1) = \frac{7}{4}$, $f(-1) = \frac{3}{2}$.

Exercice 9.

1. On considère le nombre B dont l'écriture décimale illimitée est $0{,}375\,375\,375\ldots$ où 375 est répété indéfiniment. Le nombre B est-il rationnel ? Justifiez votre réponse.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme $u_1 = 0{,}375$ et $u_{n+1} = 10^{-3}u_n$ pour tout entier n.
   (a) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
   (b) On considère pour tout entier naturel n, la somme S_n des n premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On a donc $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.
   Exprimez S_n en fonction de n.
3. Conjecturez la valeur de $\lim_{n\to+\infty} 10^{-3n}$.
4. Déduisez-en $\lim_{n\to+\infty} S_n$. Que représente ce nombre par rapport à B ?