Droites.

I La définition moderne d'une droite.

1 Définition.

Définition 1

Soient A et B deux points distincts du plan euclidien.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou n'importe quel vecteur qui lui soit colinéaire et non nul est appelé *un vecteur directeur de la droite.*
2. Pour définir une droite il faut et il suffit que nous en connaissions un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Nous avions besoin de deux points et nous avons à nouveau besoin de deux informations.
3. Cette définition de la droite ne dépend pas d'un repère choisi et est donc très générale.

2 Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

3 Décrire une droite par un point et un vecteur directeur.

4 Parallélisme et vecteurs directeurs.

Définition 2

Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires
Dans ce cas ont ont dit qu'elles ont la même direction.

5 Perpendicularité et vecteurs directeurs.

II Les équations cartésiennes de droites.

1 Équation cartésienne.

Proposition 1

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x,y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite.

Remarques.

1. Une équation cartésienne n'est pas unique : $x + 3y + 1 = 0$ et $2x + 6y + 2 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite, la seconde étant obtenue en multipliant la première par 2.
2. Dans la suite de la leçon nous distinguerons trois types de droites correspondant à deux types d'équations différentes.
3. Le choix du vecteur directeur au (ii) de la démonstration est à retenir : si une droite à une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors les vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

2 Trouver un vecteur directeur grâce à une équation cartésienne.

3 Équations réduites.

Proposition 2 - équations réduites.

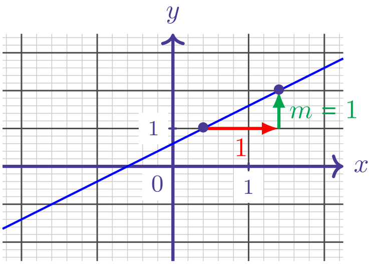
Soient :
. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère du plan,
. $\mathscr{D}$ une droite du plan.

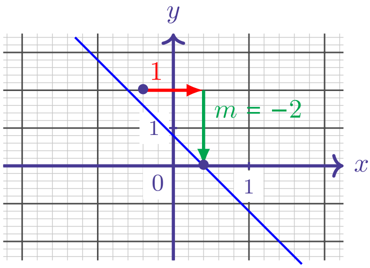
(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Remarques.

1. Comme $y = mx + p \Longleftrightarrow mx - y + p = 0$ nous pouvons affirmer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.
   Nous obtenons ainsi une méthode de lecture graphique du coefficient directeur d'une droite.





2. Nous reconnaissons, dans la seconde équation réduite, l'expression d'une fonction affine. m sera encore appelé la pente (ou le coefficient directeur) et p l'ordonnée à l'origine.

Proposition 3

Soient :
. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère d'un plan euclidien,
. A et B deux points distincts du même plan.

Si (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

III Tangente.

Définition 3

Soient :
. I un intervalle non trivial,
. f une fonction définie sur un intervalle I,
. $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors nous appellerons *tangente à la courbe représentative de f*, $\mathscr{C}_f$, *au point $A(a,f(a))$*, la droite passant par A et de pente $f'(a)$.

Proposition 4

Soient :
. I un intervalle non trivial,
. f une fonction définie sur un intervalle I,
. $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a,f(a))$ a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Remarques.

Remarques.

1. Ainsi $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. Autrement dit localement (en zoomant) en a la courbe représentative de f et sa tangente se confondent.
2. Il est possible de retrouver cette équation en utilisant la formule de calcul du coefficient directeur $f'(a) = \frac{y-f(a)}{x-a}$.
3. La tangente permet une interprétation géométrique du nombre dérivé. *Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.* ♡
4. $f'(a)$ peut donc s'interprété comme un "coefficient directeur" instantané de la fonction en l'abscisse a. Autrement dit il représente la pente de la courbe en cette abscisse. Par exemple, si $f'(a) > 0$, alors f est (localement) strictement croissante.

IV Exercices.