Droites.

I La définition moderne d'une droite.

1 Définition.

Définition 1

Soient A et B deux points distincts du plan euclidien.

Nous noterons (AB), et nous appellerons *droite passant par A et B*, l'ensemble de tous les points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Remarques.

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou n'importe quel vecteur qui lui soit colinéaire et non nul est appelé *un vecteur directeur de la droite.*
2. Pour définir une droite il faut et il suffit que nous en connaissions un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Nous avions besoin de deux points et nous avons à nouveau besoin de deux informations.
3. Cette définition de la droite ne dépend pas d'un repère choisi et est donc très générale.

2 Tracer une droite connaissant un point et un vecteur directeur.

Exercice 1.

Après avoir choisi un repère du plan dessinez la droite passant par $A(2{,}1)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$.

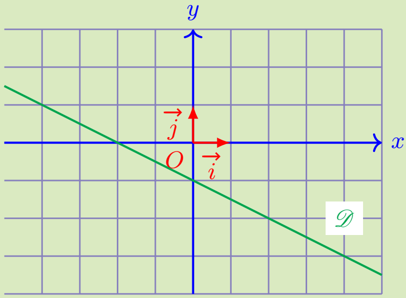
Exercice 2.

On considère un point $A(4;3)$.
Tracez quatre droites d_1 à d_4 passant par A et admettant respectivement pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$.

3 Décrire une droite par un point et un vecteur directeur.

Exercice 3.

Sans justification donnez les coordonnées de 3 vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}$ représentée ci-dessous dans un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.



Exercice 4.

Dans chacun des cas suivants, indiquez si le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A(-14;2)$, $B(5;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
2. $A(-7;3)$, $B(5;1)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\1\end{pmatrix}$.
3. $A(5;2)$, $B(0;-3)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.
4. $A(4;-2)$, $B(3;-4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}4{,}5\\9\end{pmatrix}$.

Exercice 5.

Dans chacun des cas suivants, calculez les coordonnées de trois vecteurs directeurs de (AB).

1. $A(2;3)$ et $B(-1;2)$.
2. $A(-5;4)$ et $B(3;1)$.
3. $A(3;0)$ et $B(0;3)$.
4. $A(7;8)$ et $B(7;9)$.

4 Parallélisme et vecteurs directeurs.

Maintenant que nous avons une définition de la droite nous allons reformuler les propriétés des droites avec cette définition.

Définition 2

Nous dirons que deux droites sont *parallèles* si et seulement si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires
Dans ce cas ont ont dit qu'elles ont la même direction.

Exercice 6.

On considère une droite d passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.
Soient $B(7;-5)$, $C(-4;6)$ et $D(3;-4)$.

1. Tracez la droite d puis placez B, C et D.
2. Le point B est-il sur d ?
3. Les droites d et (CD) sont-elles parallèles ?

5 Perpendicularité et vecteurs directeurs.

La perpendicularité de deux droites nécessite d'introduire une nouvelle opération entre les vecteurs appelée le *produit scalaire*.

II Les équations cartésiennes de droites.

1 Équation cartésienne.

Exemples.

Proposition 1

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan euclidien.

(i) Pour toute droite $\mathscr{D}$ il existe des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls) tels que $\mathscr{D}$ est formée de tous les points $M(x,y)$ pour lesquels x et y vérifient l'équation $ax+by+c=0$.

(ii) Réciproquement étant donné des réels a, b et c (avec a et b non simultanément nuls), l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que x et y vérifient l'équation $ax+by+c=0$ est une droite.

Démonstration

(i) Soient $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff \det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)=0\\
&\iff \begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A \end{vmatrix}=0\\
&\iff (x-x_A)(y_B-y_A)-(y-y_A)(x_B-x_A)=0\\
&\iff (y_B-y_A)x-(x_B-x_A)y-x_A(y_B-y_A)+y_A(x_B-x_A)=0
\end{aligned}$$

Donc en posant $a = y_B - y_A$, $b = -(x_B - x_A)$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$ nous obtenons bien que x et y sont solution de l'équation $ax + by + c = 0$.

(ii) Cette démonstration est plus technique et astucieuse. Nous n'en présenterons ici que la trame.
Pour s'assurer que l'équation est celle d'une droite nous devons trouver une droite qui lui corresponde, *i.e.* un point et un vecteur directeur de cette droite.
Pour le point nous choisirons $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ si $a \neq 0$ et $\left(0; -\frac{c}{b}\right)$ sinon.
Pour le vecteur directeur nous choisissons $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ (ce choix astucieux s'inspire de la démonstration de (i)).
Il ne reste plus, en faisant comme au (i), qu'à vérifier que l'équation cartésienne obtenue pour ce point et ce vecteur directeur est bien : $ax + by + c = 0$.

■

Remarques.

1. Une équation cartésienne n'est pas unique : $x + 3y + 1 = 0$ et $2x + 6y + 2 = 0$ sont deux équations cartésiennes d'une même droite, la seconde étant obtenue en multipliant la première par 2.
2. Dans la suite de la leçon nous distinguerons trois types de droites correspondant à deux types d'équations différentes.
3. Le choix du vecteur directeur au (ii) de la démonstration est à retenir : si une droite à une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ alors les vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 7.

Soient $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère cartésien, $A(3; -1)$ un point et $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\-102\end{pmatrix}$.

1. Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant pas A et de vecteur directeur $\vec{u}$.
2. Démontrer que $B\left(0; -\frac{155}{2}\right) \in \mathscr{D}$.

Exercice 8.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant A et de vecteurs directeur $\vec{u}$.

1. $A(3; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.
2. $A(-2; 5)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$.
3. $A(5; -10)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.
4. $A(0; 4)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 9.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et B.

1. $A(2;1)$ et $B(5;-6)$.
2. $A(-3;0)$ et $B(1;1)$.
3. $A(-1;7)$ et $B(0;3)$.
4. $A(6;8)$ et $B(3;2)$.

Exercice 10.

Soient $A(-3;4)$ et $B(2;1)$ et $C(-1;-3)$.

1. Calculez les coordonnées du point M milieu de $[AC]$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de la médiane issue de B dans ABC.

Exercice 11.

Déterminez une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A(5;4)$, $B(-1;2)$ et $C(4;-3)$.
2. $A(-5;-1)$, $B(6;4)$ et $C(1;2)$.

Exercice 12.

Déterminez une équation cartésienne de la droite (AB) puis vérifiez si A, B et C sont alignés.

1. $A(-2;4)$, $B(7;2)$ et $C(11;1)$.
2. $A(-4;-1)$, $B(4;3)$ et $C(44;23)$.
3. $A(-26;20)$, $B(51;6)$ et $C(30;10)$.
4. $A(20;18)$, $B(72;40)$ et $C(124;62)$.

2 Trouver un vecteur directeur grâce à une équation cartésienne.

Nous allons utiliser la remarque faites précédemment : si une droite a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ en est un vecteur directeur.

Exercice 13.

Déterminez un vecteur directeur de la droite d.

1. $d: \ 4x - 3y + 1 = 0$.
2. $d: \ x - 5y + 2 = 0$.
3. $d: \ -x + 2y - 5 = 0$.

Exercice 14.
Dites si les droites d et d' sont strictement parallèles, confondues ou sécantes.

1. $d:\ 2x-6y+5=0$ et $d':\ x-3y+2=0$.
2. $d:\ 4x-3y+1=0$ et $d':\ 5x-4y+2=0$.
3. $d:\ 3x+9y+2=0$ et $d':\ 12x+36y+8=0$.

3 Équations réduites.

Les équations réduites sont des équations cartésiennes simplifiées qui font le lien entre équation cartésienne et fonction affine.

Pour une fonction affine chaque valeur indiquée sur l'axe des abscisses est reliée à une valeur sur l'axe des ordonnées. Les ordonnées, y, s'expriment en fonction des valeurs en abscisses, x.

Autrement dit pour définir un fonction nous devons obtenir une expression de la forme : $y=f(x)$. Nous allons l'obtenir à partir d'une équation cartésienne.

Exemples.

1. Soit $\mathscr{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est $4x+2y-14=0$.

$$4x+2y-14=0$$

équivaut successivement à

$$\begin{aligned}4x+2y-14-4x+14&=0-4x+14\\2y&=-4X+14\\\frac{2y}{2}&=\frac{-4x+14}{2}\\y&=\frac{-4x}{2}+\frac{14}{2}\\y&=-2x+7\end{aligned}$$

2. Soit d la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est $8y+32=0$.
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite dont une équation cartésienne dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ est $3x+6=0$.

Proposition 2 - équations réduites.

Soient :
. $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère du plan,
. $\mathscr{D}$ une droite du plan.

(i) Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $x = r$ avec r une constante réelle.

(ii) Si $\mathscr{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées alors elle admet une équation réduite de la forme : $y = mx + p$ avec m et p des constantes réelles.

Démonstration

Considérons une droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Nous utiliserons le fait que la vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ et aussi le fait que a et b ne peuvent être simultanément nuls.

On distingue les deux cas.

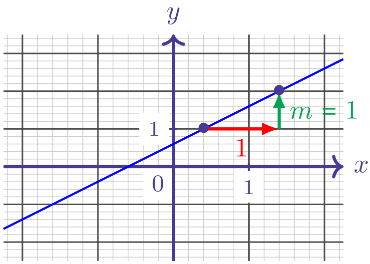
(i) Premier cas : la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.
Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{j}$ et par conséquent : $-b = 0$ et $a \neq 0$.
Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ se simplifie en $ax + c = 0$. Et puisque $a \neq 0$: $x = \frac{-c}{a}$.

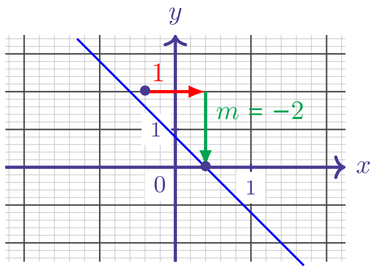
(ii) Second cas : la droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Donc le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{j}$ et nécessairement : $b \neq 0$.
Ainsi l'équation cartésienne de $\mathscr{D}$ peut s'écrire : $y = \frac{-a}{b}x + \frac{-c}{b}$.

■

Remarques.

1. Comme $y = mx + p \iff mx - y + p = 0$ nous pouvons affirmer que le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation réduite $y = mx + p$.
Nous obtenons ainsi une méthode de lecture graphique du coefficient directeur d'une droite.





2. Nous reconnaissons, dans la seconde équation réduite, l'expression d'une fonction affine. m sera encore appelé la pente (ou le coefficient directeur) et p l'ordonnée à l'origine.

Proposition 3

Soient :
. $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère d'un plan euclidien,
. A et B deux points distincts du même plan.

Si (AB) admet une équation réduite de la forme $y = mx + p$ alors

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Démonstration

En notant $f : x \mapsto mx + p$ nous remarquons que m est le taux d'accroissement de f entre x_A et x_B (puisque $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$).

■

Exercice 15.

1. Déterminez la pente de la droite d d'équation $-8x + 3y + 5 = 0$.
2. Déterminez la pente de la droite (AB) avec $A(-1, -9)$ et $B(2; 6)$.
3. Déterminez les pentes de chacune des droites dessinée.
4. Déterminez la pente de la droite d d'équation $y = 3{,}3x + 6{,}5$.
5. Déterminez la pente de la droite d d'équation $y = 2$.
6. Déterminez la pente de la droite d d'équation $y = -7 - x$.
7. Déterminez la pente de la droite d d'équation $y = \frac{4x+9}{5}$.
8. Déterminez la pente de la droite d d'équation $x = -0{,}8$.
9. Déterminez la pente de la droite d d'équation $4x + 2y + 5 = 0$.

III Tangente.

Définition 3

Soient :
. I un intervalle non trivial,
. f une fonction définie sur un intervalle I,
. $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors nous appellerons *tangente à la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, au point $A(a,f(a))$*, la droite passant par A et de pente $f'(a)$.

Proposition 4

Soient :
. I un intervalle non trivial,
. f une fonction définie sur un intervalle I,
. $a \in I$.

Si f est dérivable en a, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a,f(a))$ a pour équation réduite

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Démonstration

Soit $M(x,y)$ un

■

Remarques.

Remarques.

1. Ainsi $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a. Autrement dit localement (en zoomant) en a la courbe représentative de f et sa tangente se confondent.
2. Il est possible de retrouver cette équation en utilisant la formule de calcul du coefficient directeur $f'(a) = \frac{y-f(a)}{x-a}$.
3. La tangente permet une interprétation géométrique du nombre dérivé. *Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.* ♡

4. $f'(a)$ peut donc s'interprété comme un "coefficient directeur" instantané de la fonction en l'abscisse a. Autrement dit il représente la pente de la courbe en cette abscisse. Par exemple, si $f'(a) > 0$, alors f est (localement) strictement croissante.

Exercice 16.

Nous avons remarqué que $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en 2 et son nombre dérivé est $f'(2) = 4$.
Déduisez-en l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f au point d'abscisse $a = 2$ a pour équation

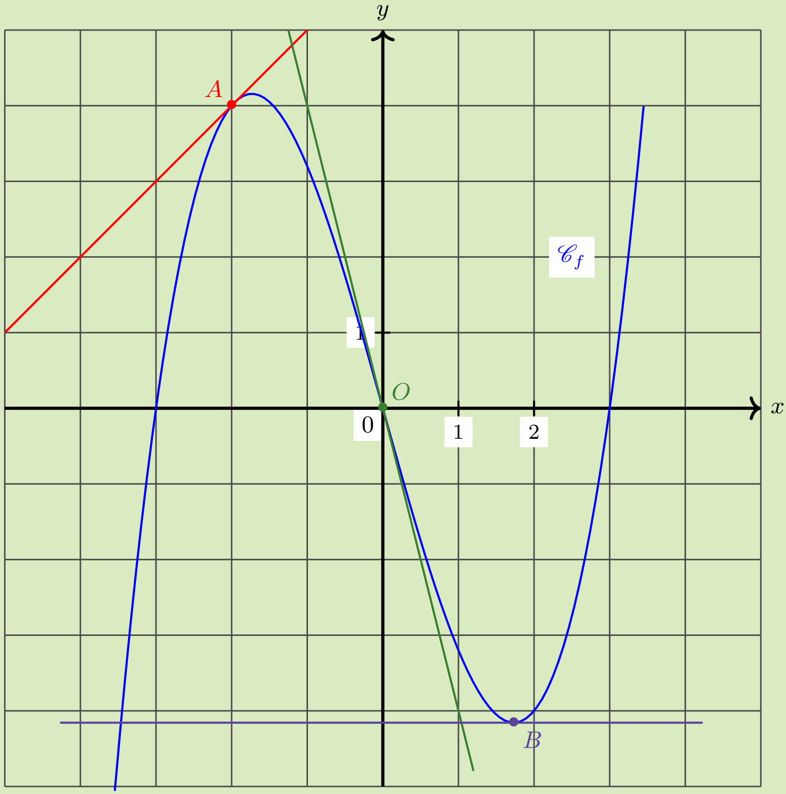
Exercice 17.

Déterminez la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a dans les cas suivants.

1. $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $a = 1$.
2. $f : x \mapsto -3x + 2$ et $a = 7$.
3. $f : x \mapsto (x + 2)^2$ et $a = -1$.
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $a = 2$.
5. $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $a = 2$.

Exercice 18. ♥

On a dessiné ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f ainsi que les tangentes à cette courbe aux points $A(-2;4)$, $O(0{,}0)$ et $B(\sqrt{3};0{,}4\sqrt{3}^3-3{,}6\sqrt{3})$.



1. Déterminez les nombres dérivés de f en -2, en 0 et en $\sqrt{3}$.
2. Déduisez-en, les équations réduites des tangentes à $\mathscr{C}_f$ en A, O et B.

Exercice 19.

IV Exercices.

Exercice 20.

Exercice 21.

Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x - 1$.

1. Calculez le nombre dérivé de f en $a = \frac{1}{3}$.
2. Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{1}{3}$.

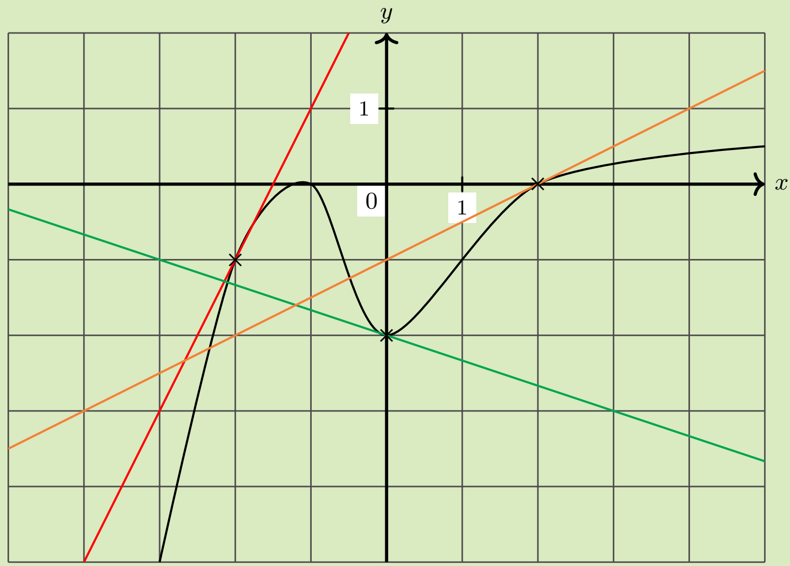
Exercice 22.

Soit f a fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 2x + 3$.

1. Calculez le nombre dérivé de f en $a = \sqrt{2}$.
2. Déterminez l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{2}$.

Exercice 23.

Dans le repère ci-dessous est dessiné la courbe représentative d'une fonction f ainsi que trois de ses tangentes.



Déterminez les équations réduites des tangentes à la courbe représentative de f au points d'abscisses -2 et 0 et 2.

Exercice 24.

Considérons une fonction f définie sur $[-5;5]$.

1. Dans un repère orthonormé dessinez les points $A(-3,-3)$, $B(0{,}4)$ et $C(4{,}4)$.
2. Tracez les tangentes à $\mathscr{C}_f$ respectivement en A, B et C d'équations réduites respectives $d_A : \ y = 2x+3$, $d_B : \ y = -\frac{1}{2}x+4$ et $d_C : \ y = -x+8$.
3. Tracez à main levée une courbe représentative possible pour f.