Signe et variation de fonctions.

I Signe des fonctions.

1 Tableau de signe.

2 Fonctions de référence.

3 Fonctions affines.

Exercice 1.

Donnez le tableau de signe de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

4 Fonctions polynomiales de degré deux.

Exercice 2.

Étudiez le signe de la fonction f définie sur I dans les cas suivants.

a) $f(x) = (x - 72)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -2(x - 2)(x + 3)$ et $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 7(x + 3)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = -x^2 - 1$ et $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = x + 1$ et $I = [-10; 10]$,

f) $f(x) = 3x^2 - 24x + 48$ et $I = [-10; 10]$.

g) $f(x) = x^2 + x - 2$ et $I = [-5; 3]$.

h) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ et $I = [-2; 2]$.

5 À l'arrache en utilisant factorisation et quotient.

Exercice 3.

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

1. $x^2 - 4x \leq -2x - 1$
2. $3x(x+3) - (x+3)^2 \leq 0$
3. $x^3 + 2x^2 + x \geq 0$
4. $x(x+6) > 3(x+6)$
5. $2x(x-3) + 3x - 9 < 6x - 18$
6. $x^2(1-3x) + 4(6x-2) \geq 0$
7. $(1-2x)x - 4x(x+6) \leq 0$
8. $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$
9. $(x^2 - 1) + 2x - 2 > 6x - 6$
10. $x^2 \leq 10$
11. $x^2 \leq -16$
12. $x^2 \leq 0$
13. $x^2 < 8$
14. $x^2 \leq 144$
15. $x^2 \leq 20$
16. $x^2 - 4 + (x+2)(2x+5) < 0$
17. $(x+1)(x-3) \geq x^2 - 9$
18. $4x - 4 + (x-1)(x-4) + x^2 - 1 > 0$
19. $(x+5)^2 \leq (x+5)(x+3)$
20. $(2x-1)(x+3) \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+6)$

Exercice 4.

Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. $\frac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$
2. $\frac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$
3. $\frac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$
4. $\frac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\frac{2x+3}{x+1} \leq \frac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \frac{2x+10}{-x+3}$
7. $\frac{x+3}{2x-1} \geq 0$
8. $\frac{2-x}{5-2x} \leq 0$
9. $\frac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\frac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\frac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq 0$
12. $\frac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$
13. $\frac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\frac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\frac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$
16. $\frac{x+1}{3-x} \leq 0$
17. $\frac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\frac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\frac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$
20. $\frac{x+4}{5-x} < 2$

II Étude de variations.

1 Fonctions de références.

2 Des presque fonctions de références.

3 Utilisation de la dérivée

Exercice 5.

Soit $f : x \mapsto x + 1 + \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculez f' et f''.
2. Étudiez les variations de f' et démontrez que $f' > 0$.
3. Déduisez-en les variations de f.

Exercice 6.

1. (a) Étudiez les variations de $g : x \mapsto x + 2 - \mathrm{e}^{x}$ définie sur $[0, +\infty[$.
   (b) Justifiez que $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0, +\infty[$.
   (c) Déduisez-en le signe de g sur $[0, +\infty[$.
2. Étudiez les variations de $f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x\mathrm{e}^{x}+1}$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 7.

Étudiez les variations des fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle I.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3\ln(2x-1)$ et $I =]0{,}5; +\infty[$.

b) $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ et $I =]-1{,}1[$.

c) $f(x) = (5x+7)\sqrt{x^2-1}$ et $I =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

d) $f(x) = \exp\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)$ et $I =]-\infty{,}2] \cup [3, +\infty[$.

e) $f(x) = \exp -x^2 + x + 1$ et $I = \mathbb{R}$.

f) $f(x) = \frac{x}{2}\ln(1-x^2)$ et $I =]-1{,}1[$.