Signe et variation de fonctions.

I Signe des fonctions.

1 Tableau de signe.

2 Fonctions de référence.

3 Fonctions affines.

Exercice 1.

Donnez le tableau de signe de f définie sur l'intervalle I dans les différents cas proposés.

1. $f(x) = 2x + 4$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = 5x - 15$, $I = \mathbb{R}$.
3. $f(x) = -7x + 14$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = -13x - 39$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f(x) = x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
6. $f(x) = x - \pi$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $I = \mathbb{R}$.
8. $f(x) = -x - 2$, $I = \mathbb{R}$.
9. $f(x) = 3x + 7$, $I = \mathbb{R}$.
10. $f(x) = 5x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
11. $f(x) = -4x + 13$, $I = \mathbb{R}$.
12. $f(x) = -3x - 4$, $I = \mathbb{R}$.
13. $f(x) = 5x + 12$, $I =]-\infty; -3[$.
14. $f(x) = 6x - 8$, $I = [-12; 10]$.
15. $f(x) = -8x + 12$, $I = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$.
16. $f(x) = -3x - 24$, $I =]-8; 10[$.

Correction de l'exercice 1

1.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

2.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

3.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

4.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

5.

x	$-\infty$		-7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

6.

x	$-\infty$		π		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

7.

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

8.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

9.

x	$-\infty$		$-\frac{7}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

10.

x	$-\infty$		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

11.

x	$-\infty$		$\frac{13}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

12.

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

13.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{12}{5}$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

14.

x	-12		$\frac{4}{3}$		10
$f(x)$		$-$	0	$+$	

15.

x	$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$	0	$-$	

16.

x	-8		10
$f(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$

4 Fonctions polynomiales de degré deux.

Exercice 2.

Étudiez le signe de la fonction f définie sur I dans les cas suivants.

a) $f(x) = (x-72)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = -2(x-2)(x+3)$ et $I = \mathbb{R}$.

c) $f(x) = 7(x+3)^2$ et $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = -x^2 - 1$ et $I = \mathbb{R}$.

e) $f(x) = x + 1$ et $I = [-10; 10]$,

f) $f(x) = 3x^2 - 24x + 48$ et $I = [-10; 10]$.

g) $f(x) = x^2 + x - 2$ et $I = [-5; 3]$.

h) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ et $I = [-2; 2]$.

Correction de l'exercice 2

a)

b) Dressons le tableau de signe de f.

f est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée avec $a = -2$, $x_1 = 2$ et $x_2 = -3$.
f est donc du signe de $a < 0$ sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) Dressons le tableau de signe de g.

g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme factorisée avec $a = 7$, $x_1 = -3$ et $x_2 = -3$.
g est donc du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

d) Démontrons que h est strictement négative.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Nous avons successivement

$$\begin{aligned} x^2 &\geqslant 0 \\ -x^2 &\leqslant 0 \\ -x^2 - 1 &< 0 \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) < 0$.

f est strictement négative.

e) Dressons le tableau de signe de ℓ.

Ce n'est pas parce que vous avez un marteau qu'il y a des clous partout : il ne s'agit pas d'une fonction polynomiale de degré deux.
$\ell : x \mapsto x+1$ est une fonction affine avec $m = 1$ et $p = 1$. $m > 0$ donc ℓ est strictement croissante. ℓ s'annule en $-\frac{p}{m} = -\frac{1}{1} = -1$.

x	-10		-1		10
$\ell(x)$		$-$	0	$+$	

f) Dressons le tableau de signe de f.

* f est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 3$, $b = -24$ et $c = 48$.
*
$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-24)^2 - 4 \times 3 \times 48\\ &= 0\end{aligned}$$
$\Delta = 0$ donc f admet une racine double.
*
$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
$$x_0 = \frac{-(-24)}{2 \times 3}$$
$$x_0 = 4$$
* Le trinôme f est du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	-10		4		10
$f(x)$		$+$	0	$+$	

g) Dressons le tableau de signe de g.

* g est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 1$, $b = 1$ et $c = -2$.
*

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) \\ &= 9\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ donc g admet deux racines distinctes.

*

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
$x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{9}}{2 \times 1}$	$x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{9}}{2 \times 1}$
$x_1 = -2$	$x_2 = 1$

* Le trinôme g est du signe de $a > 0$ sauf entre ses racines.

x	-5		-2		1		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

h) Étudions le signe de h sur $[-2;2]$.

* $h(X)$ est un polynôme de degré deux, donné sous forme développée avec : $a=-1$, $b=4$ et $c=-3$.

  $x_1=1$ est clairement racine de $h(X)$. Nous en déduisons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{c}{a} \\ 1\times x_2 &= \frac{-3}{-1} \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

* Le trinôme h est du signe de son coefficient dominant $a<0$ saut entre ses racines donc

x	-2		1		2
$h(x)$		$-$	0	$-$	

Si vous avez du mal à voir ce qui ses passe voici une présentation alternative dans laquelle on considère que h est définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		1		2		3		$+\infty$
h		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

5 À l'arrache en utilisant factorisation et quotient.

Exercice 3.

Résolvez les inéquation suivantes dans l'ensemble des réels.

1. $x^2 - 4x \leq -2x - 1$
2. $3x(x+3) - (x+3)^2 \leq 0$
3. $x^3 + 2x^2 + x \geq 0$
4. $x(x+6) > 3(x+6)$
5. $2x(x-3) + 3x - 9 < 6x - 18$
6. $x^2(1-3x) + 4(6x-2) \geq 0$
7. $(1-2x)x - 4x(x+6) \leq 0$
8. $7 - x^2 < 2x - 2\sqrt{7}$
9. $(x^2 - 1) + 2x - 2 > 6x - 6$
10. $x^2 \leq 10$
11. $x^2 \leq -16$
12. $x^2 \leq 0$
13. $x^2 < 8$
14. $x^2 \leq 144$
15. $x^2 \leq 20$
16. $x^2 - 4 + (x+2)(2x+5) < 0$
17. $(x+1)(x-3) \geq x^2 - 9$
18. $4x - 4 + (x-1)(x-4) + x^2 - 1 > 0$
19. $(x+5)^2 \leq (x+5)(x+3)$
20. $(2x-1)(x+3) \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)(x+6)$

Correction de l'exercice 3

1. $(x-1)^2 \leq 0$. $\mathscr{S} = \{1\}$.
2. $(x+3)(2x-3) \leq 0$. $\mathscr{S} = \left[-3; \frac{3}{2}\right]$.
3. $x(x+1)^2 \geq 0$. $\mathscr{S} = \{-1\} \cup [0; +\infty[$.
4. $(x-3)(x+6) > 0$. $\mathscr{S} =]-\infty; -6[\cup]3; +\infty[$.
5. $(x-3)(2x-3) < 0$. $\mathscr{S} = \left]\frac{3}{2}; 3\right[$.
6. $$x^2(1-3x) + 4(6x-2) \geqslant 0$$

   équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} x^2(1-3x) + 4 \times (-2)(1-3x) &\geqslant 0 \\ x^2(1-3x) - 8(1-3x) &\geqslant 0 \\ [x^2 - 8](1-3x) &\geqslant 0 \\ [x^2 - (2\sqrt{2})^2](1-3x) &\geqslant 0 \\ (x - 2\sqrt{2})(x + 2\sqrt{2})(1-3x) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		$\frac{1}{3}$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$x-2\sqrt{2}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$1-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\mathscr{S} = \left]-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; 2\sqrt{2}\right]$.

7. $x(-6x-23) \leq 0$.
8. $(\sqrt{7}-x)(x+\sqrt{7}+2) < 0$.
9. $(x-1)(x-3) > 0$.
10. $(x-\sqrt{10})(x+\sqrt{10}) \leq 0$.
11.
12.
13. $(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2}) < 0$.
14. $(x-12)(x+12) \leq 0$.
15. $(x-2\sqrt{5})(x+2\sqrt{5}) \leq 0$
16. $3(x+2)(x+1) < 0$.
17. $-2(x-3) \geq 0$.
18. $(x-1)(2x+1) > 0$.
19. $2(x+5) \leq 0$.
20. $x\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 4.

Résolvez les inéquations dans $\mathbb{R}$.

1. $\frac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$
2. $\frac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$
3. $\frac{2x+4}{x-1} - 2 \geq 0$
4. $\frac{2x+4}{x+1} < 3$
5. $\frac{2x+3}{x+1} \leq \frac{x-6}{x+1}$
6. $1 < \frac{2x+10}{-x+3}$
7. $\frac{x+3}{2x-1} \geq 0$
8. $\frac{2-x}{5-2x} \leq 0$
9. $\frac{3x-1}{-x+5} > 0$
10. $\frac{5x(x-2)}{4x+1} < 0$
11. $\frac{2x^2}{(-x+1)(x+3)} \geq 0$
12. $\frac{-x(x-4)}{2+x^2} \leq 0$
13. $\frac{(x+1)(x-2)}{3-x} > 0$
14. $\frac{9-4x}{11-5x} < 0$
15. $\frac{-5+4x}{2x-1} \geq 0$
16. $\frac{x+1}{3-x} \leq 0$
17. $\frac{7-2x}{2x-1} > 0$
18. $\frac{-5x}{(2x-7)^2} < 0$
19. $\frac{1+2x^2}{7-x} \geq 0$
20. $\frac{x+4}{5-x} < 2$

Correction de l'exercice 4

1. Étudions le signe de $h : x \mapsto \frac{2x-4}{x+2}$.

   . $f : x \mapsto 2x - 4$ est une fonction affine avec $a = 2$ et $b = -4$. $a > 0$ donc f est strictement croissante. f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-4}{2} = 2$.

   . $g : x \mapsto x + 2$ est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 2$. $a > 0$ donc g est strictement croissante. g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{2}{1} = -2$.

   Nous en déduisons

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$2x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   L'ensemble des solutions de $\frac{2x-4}{x+2} \leqslant 0$ est $\mathscr{S} =]-2; 2]$.

2. Étudions le signe de $h : x \mapsto \frac{-2x+8}{3x-2}$.

   . $f : x \mapsto -2x + 8$ est une fonction affine avec $a = -2$ et $b = 8$. $a < 0$ donc f est strictement décroissante. f s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{8}{-2} = 4$.

. $g : x \mapsto 3x - 2$ est une fonction affine avec $a = 3$ et $b = -2$. $a > 0$ donc g est strictement croissante. g s'annule en $-\frac{b}{a} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$.

Nous en déduisons

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
$-2x+8$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$h(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de $\frac{-2x+8}{3x-2} \leqslant 0$ est $\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{2}{3}\right[\cup [4; +\infty[$.