Dérivation.

I Une approche intuitive : un coefficient directeur.

II Des fonctions de référence.

On présente ci-dessous des fonctions f en donnant leur expression algébrique, celle de la fonction dérivée f' et le domaine de dérivabilité $\mathscr{D}_{f'}$ (*i.e.* l'ensemble des valeurs de x pour lesquels il est effectivement possible de calculer $f'(x)$).

n désigne un entier naturel.

1 Les fonctions puissances.

$f(x) =$	3	x	x^2	x^3	x^4	x^n
$f'(x) =$	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	nx^{n-1}
$x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

2 Les fonctions polynomiales.

La fonction polynomiale (à coefficients réels)

$$P : x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$P' : x \mapsto na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2 + xa_1.$$

Plus que la formule c'est sa mise en pratique qui est connaître.

3 Autres fonctions de référence à exposant.

$f(x) =$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$	x^{-n}	$\sqrt{x}$
$f'(x) =$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$-nx^{-n-1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \in$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$

Toutes les formules données ci-dessus relèvent d'une seule et même formule.
Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et si la fonction f est définie par

$$f(x) = x^\alpha,$$

alors

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1},$$

pour x pris dans le domaine de dérivabilité (qui diffère suivant les valeurs de α).

4 D'autres classiques.

$f(x) =$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\tan(x)$
$f'(x) =$	e^x	$\dfrac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$1+\tan^2(x)$
$x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

III Sommes, produits, quotients, composées...

1 Linéarité.

Exercice 1.

Déterminez la fonction dérivée de $f : \left\{ \begin{array}{rcl}]0;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + \sqrt{x} \end{array} \right.$.

Exercice 2.
Déterminez la fonction dérivée de $f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}$ sur son ensemble de définition dans les cas suivants :

1. $f(x) = 3x^2$ quel que soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,
2. $f(x) = -x^3$ quel que soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,
3. $f(x) = \frac{-2}{x}$ quel que soit x pris dans $\mathbb{R}_+^*$,

Exercice 3.
Déterminez la dérivée de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $f(x) = -2x + 7$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
2. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$,
3. $f(x) = -6x^7 - x^5$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2 Produit.

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un ensemble E alors leur produit $u \times v$ est dérivable sur E et

$$(u \times v)' = u'v + uv'.$$

Exercice 4.
Déterminez la dérivée de la fonction f en précisant l'ensemble de dérivabilité dans les cas suivants.

a) $f(x) = x^2\sqrt{x}$,
b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$,
c) $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)(5x^3 - 7x)$,
d) $f(x) = 4(x + \sqrt{x})x^3$,
e) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$,
f) $f(x) = \ln(x)\mathrm{e}^x$,
g) $f(x) = x^2\ln(x)$,
h) $f(x) = (2x^2 + 1)\mathrm{e}^x$.

Exercice 5.
Déterminez les fonctions dérivées de la fonction f en précisant son ensemble de dérivabilité lorsque f est définie par :

a) $f(x) = x^3\sqrt{x}$.
b) $f(x) = 3x^2\ln(x)\sqrt{x}$.
c) $f(x) = (x^2 + 5x - 1)^2$.
d) $f(x) = (3x - 4)^2$.

3 Quotient.

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un ensemble E alors leur quotient $u \times v$ est dérivable sur E, hormis les valeurs qui annulent v, et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exercice 6.

Déterminez les fonctions dérivées des fonctions de la variable x suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 2x + 1}{x - 1}$,

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x^3}$,

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Exercice 7. Application.

Déterminez les fonctions dérivées de la fonction f en précisant son ensemble de dérivabilité lorsque f définie par :

a) $f(x) = \dfrac{1}{3x - 12}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x + 3}$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{-5x + 2}$.

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 5}$.

e) $f(x) = -\dfrac{2}{7x + 2}$.

f) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

g) $f(x) = \dfrac{3}{0{,}5x^2 + 1}$.

h) $f(x) = -4x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

i) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 4x + 1}{x^4 + x^2 + 1}$.

4 Composées.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des fonctions dérivables alors leur composée $g \circ f$ est dérivable sur E et

$$(g \circ f)' = g' \circ f \times f'.$$

Exercice 8.

Calculez la dérivée de la fonction h dans les cas suivants.

a) $h(x) = (x^2 + 5)^3$.

b) $h(x) = (x^3 + 5)^{-3}$.

c) $h(x) = (x^2 + 2x)^4$.

d) $h(x) = (1 - 3x)^{10}$.

e) $h(x) = \sqrt{2 + x^2}$.

f) $h(x) = \sqrt{7x^2 + 3x + 1}$.

g) $h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$.

h) $h(x) = \sqrt{6x^4 + 3}$.

i) $h(x) = \left(\dfrac{x-1}{5}\right)^5$.

j) $h(x) = \left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)^2$.

k) $h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

l) $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

m) $h(x) = \mathrm{e}^{3x}$.

n) $h(x) = \mathrm{e}^{x-4}$.

o) $h(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

p) $h(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

IV Étudier les variations d'une fonction.

V Formulaire.

$f(x) =$	3	x	x^2	x^3	x^4	x^n
$f'(x) =$	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	nx^{n-1}
$x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

$f(x) =$	$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x^n}$	x^{-n}	$\sqrt{x}$
$f'(x) =$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$-\dfrac{2}{x^3}$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$-nx^{-n-1}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \in$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$

$f(x) =$	e^x	$\ln(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\tan(x)$
$f'(x) =$	e^x	$\dfrac{1}{x}$	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$1+\tan^2(x)$
$x \in$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$	$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Forme de f	uv	$\dfrac{u}{v}$	$g \circ f$
Forme de f'	$u'v + uv'$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$g' \circ f \times f'$