Résoudre des équations polynomiales.

I Les polynômes.

1 Généralités, vocabulaire.

2 Développer, réduire et ordonner.

Définition 1

Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

3 La boîte à outil pour développer.

Proposition 1

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques ou des fonctions numériques.

(i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b+c) = ab + ac$

(ii) Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

(iii) *Identités remarquables* :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

4 Racines et équations polynomiales.

5 Exercice.

II Équations polynomiales de degré un (fonctions affines).

III Équations polynomiales de degré deux.

Définition 2

Soient a, b et c des réels.

On appelle *discriminant* du polynôme de degré deux $aX^2 + bX + c$ le nombre réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Proposition 2

Soient a, b et c des réels.

(i) Si $\Delta > 0$ alors le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ii) Si $\Delta = 0$ alors le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet une racine double
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

(iii) Si $\Delta < 0$ alors $aX^2 + bX + c$ n'admet aucune racine réelle mais il admet deux racines complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{-\Delta}}{2a}$$

IV Équations polynomiales de degré trois ou plus.