

Résoudre des équations polynomiales.

I Les polynômes.

1 Généralités, vocabulaire.

Exercice 1.

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

a) $-3X^2 + 7X - 4X + 12X^3 + 2$

b) $7X^{25} - 8X + 3 + X - 7X + 12$

c) $3X^2 + 2X + 4X + 12$

Exercice 2.

Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

a) $4X^3 - 2X^2 + 7X - 14 + 3X$

b) $23 + X + X^2$

c) $3X + 4X^2 + 9X + 9$

2 Développer, réduire et ordonner.

3 La boîte à outil pour développer.

4 Racines et équations polynomiales.

5 Exercice.

Exercice 3.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

a) $A(x) = 4x(x + 3)$.

b) $B(x) = (3 + x)(2x - 1)$.

c) $C(x) = (x + 3)^2$.

d) $D(x) = (2x - 4)^2$.

e) $E(x) = (-x + 5)(-x - 5)$.

Exercice 4.

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

a) $A(x) = (x - 1)(x - 2)$

b) $B(x) = (x - 2)(x^2 + 3) - (x + 2)x^2$

c) $C(x) = (x + 5)^2$

d) $D(x) = (x - 5)^2$

e) $E(x) = (x + 5)(x - 5)$

f) $F(x) = (2x - 7)^2$

g) $G(x) = (3 + 2x)^2$

h) $H(x) = (11 - x)(11 + x)$

i) $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$

j) $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$

k) $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$

l) $L(x) = (5 - 11x)^2$

m) $M(x) = (12 + 13x)^2$

n) $N(x) = (9x - 4)(4 + 9x)$

o) $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$

p) $P(x) = (-x + 1,2)^2$

q) $Q(x) = (0,7 - x)(0,7 + x)$

r) $R(x) = (11x - 12)^2$

Exercice 5.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(X) = (3X + 4)(X - 5),$

b) $B(X) = 12(X - 3) - 14(X + 4),$

c) $C(X) = 11(X - 9) - 7(X - 1),$

d) $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12),$

e) $E(X) = 3,2X^2(5X^2 - 12X - 1,1),$

f) $F(X) = -2X(3X - X + 2),$

g) $G(X) = 5X(X - 3),$

h) $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4),$

i) $K(X) = (X + 3)(X + 4),$

j) $L(X) = (2X + 1)(X + 2),$

k) $M(X) = (3X - 2)(2X + 3),$

l) $N(X) = (X - 5)(X - 2),$

m) $P(X) = (2X - 1)(4X + 3),$

n) $Q(X) = (2X - 7)^2,$

o) $R(X) = (5X - 2)(X + 4),$

p) $S(X) = (3X + 1,5)(2X - 3),$

q) $T(X) = (5X - 7)(0,5X - 1,2),$

r) $U(X) = (2X - 1,1)(X + 4),$

s) $V(X) = (X - 7)(X + 7).$

Exercice 6.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(x) = (2X - 3)^2,$

b) $B(X) = [(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)](5X^2 - 4X + 3),$

c) $C(X) = (3X - 1)(5X - 2) + (X + 2)^2,$

d) $D(X) = (5X - 3)(3X + 1) - (2X - 4)(-X + 5),$

e) $E(X) = (1,5X - 5)(1,5X + 5) - (X - 1)^2,$

f) $F(X) = (5X + 2)^2 - (X - 3)^2,$

g) $G(X) = (3X - 2)^2 - (5 - 4X)(4 - 6X),$

h) $H(X) = (X - 1)(2X + 3) + (X - 1)(X + 2),$

i) $I(X) = (2X - 5)(2X + 5),$

j) $J(X) = (3X + 1)(7X - 2) + (X - 2)^2,$

k) $K(X) = (4X - 3)(3X + 2) - (2X + 5)(X - 3),$

l) $L(X) = (1,5X - 2)(1,5X + 2) - (X + 3)^2,$

m) $M(X) = (3X - 2)^2 - (X - 4)^2,$

n) $N(X) = (3X + 1)^2 - (5 - 4X)(2 + 3X),$

o) $P(X) = (X - 1)(2X + 2) + (X - 1)(2X + 2),$

p) $Q(X) = (X + 1)(X - 3) + (X + 1)(3X + 1),$

q) $R(X) = (2X - 4)(X - 1) - (X - 2)(3X + 2),$

r) $S(X) = (X - 3)(X + 2) - (X - 2)(2X + 1),$

s) $T(X) = (X + 1)(X - 4) - (2X + 8)(X + 5),$

t) $U(X) = (3X - 2)^2 - (5X - 4)(2 + 3X),$

u) $V(X) = (X + 2)(2X - 3) + (X - 1)(X + 2).$

Exercice 7.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x + 8)(x - 7) = -2x^2 + 22x - 56,$

2. $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1 - x)(x + 3),$

3. $-3(x - 3)^2 + 3 = -3(x - 4)(x - 2).$

Exercice 8.

Vérifiez que les trois formes proposées, A , B et C , correspondent à une même expression polynomiale.

a) $A(x) = (x - 3)(x + 5)$.

$$B(x) = x^2 + 2x - 15.$$

$$C(x) = (x + 1)^2 - 16.$$

b) $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$.

$$B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

$$C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$$

c) $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

$$B(x) = (2x - 1)(x + 2).$$

$$C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}.$$

Exercice 9.

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x + 1)(ax + b)$ avec a et b réels ?

Exercice 10.

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$

II Équations polynomiales de degré un (fonctions affines).

III Équations polynomiales de degré deux.

Exercice 11.

Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$.

Exercice 12.

Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X) = 2X^2 + 24X + 72$.

Exercice 13.

Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

IV Équations polynomiales de degré trois ou plus.