Résoudre des équations polynomiales.

I Les polynômes.

1 Généralités, vocabulaire.

Exercice 1.

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

a) $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$

b) $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12$

c) $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12$

Correction de l'exercice 1

a) $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2 = -3\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$

b) $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12 = 7\mathbf{X}^{25} - 14\mathbf{X} + 15$

c) $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12 = 3\mathbf{X}^2 + 6\mathbf{X} + 12$

Exercice 2.

Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

a) $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X}$

b) $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2$

c) $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9$

Correction de l'exercice 2

a) $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X} = 4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 10\mathbf{X} - 14$

b) $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 23$

c) $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9 = 4\mathbf{X}^2 + 12\mathbf{X} + 9$

2 Développer, réduire et ordonner.

3 La boîte à outil pour développer.

4 Racines et équations polynomiales.

5 Exercice.

Exercice 3.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

a) $A(x) = 4x(x+3)$.

b) $B(x) = (3+x)(2x-1)$.

c) $C(x) = (x+3)^2$.

d) $D(x) = (2x-4)^2$.

e) $E(x) = (-x+5)(-x-5)$.

Correction de l'exercice 3

a) En utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned} A(x) &= 4x \times x + 4x \times 3 \\ &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

b) En utilisant la double distributivité :

$$\begin{aligned} B(x) &= (3 + x)(2x + (-1)) \\ &= 3 \times 2x + 3 \times (-1) + x \times 2x + x \times (-1) \\ &= 6x - 3 + 2x^2 - x \\ &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

c) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Avec $a = x$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} C(x) &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

d) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Avec $a = 2x$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 4 + 4^2 \\ &= 2^2 x^2 - 16x + 16 \\ &= 4x^2 - 16x + 16 \end{aligned}$$

e) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Avec $a = -x$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} E(x) &= (-x)^2 - 5^2 \\ &= x^2 - 15 \end{aligned}$$

Exercice 4.

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

a) $A(x) = (x-1)(x-2)$

b) $B(x) = (x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2$

c) $C(x) = (x+5)^2$

d) $D(x) = (x-5)^2$

e) $E(x) = (x+5)(x-5)$

f) $F(x) = (2x-7)^2$

g) $G(x) = (3+2x)^2$

h) $H(x) = (11-x)(11+x)$

i) $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$

j) $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$

k) $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$

l) $L(x) = (5-11x)^2$

m) $M(x) = (12+13x)^2$

n) $N(x) = (9x-4)(4+9x)$

o) $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$

p) $P(x) = (-x+1{,}2)^2$

q) $Q(x) = (0{,}7-x)(0{,}7+x)$

r) $R(x) = (11x-12)^2$

Exercice 5.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(X) = (3X+4)(X-5)$,

b) $B(X) = 12(X-3) - 14(X+4)$,

c) $C(X) = 11(X-9) - 7(X-1)$,

d) $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12)$,

e) $E(X) = 3{,}2X^2(5X^2 - 12X - 1{,}1)$,

f) $F(X) = -2X(3X - X + 2)$,

g) $G(X) = 5X(X-3)$,

h) $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4)$,

i) $K(X) = (X+3)(X+4)$,

j) $L(X) = (2X+1)(X+2)$,

k) $M(X) = (3X-2)(2X+3)$,

l) $N(X) = (X-5)(X-2)$,

m) $P(X) = (2X-1)(4X+3)$,

n) $Q(X) = (2X-7)^2$,

o) $R(X) = (5X-2)(X+4)$,

p) $S(X) = (3X+1{,}5)(2X-3)$,

q) $T(X) = (5X-7)(0{,}5X-1{,}2)$,

r) $U(X) = (2X-1{,}1)(X+4)$,

s) $V(X) = (X-7)(X+7)$.

Correction de l'exercice 5

a) $P_1(X) = 3X^2 - X - 20$

b) $P_2(X) = -2X - 92$

c) $P_3(X) = 4X - 92$

d) $P_4(X) = 54X^3 - 112X^2 + 336X$

e) $P_5(X) = 16X^4 - 38{,}4X^3 - 3{,}52X^2$

f) $P_7(X) = -4X^2 - 4X$

g) $P_8(X) = 5X^2 - 3X$

h) $P_9(X) = 6X^4 - 3X^3 + 12X^2$

i) $P_{10}(X) = X^2 + 7X + 12$

j) $P_{11}(X) = 2X^2 + 5X + 2$

k) $P_{12}(X) = 6X^2 + 5X - 6$

l) $P_{13}(X) = X^2 - 7X + 10$

Exercice 6.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(x) = (2X - 3)^2$,

b) $B(X) = \left[(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)\right](5X^2 - 4X + 3)$,

c) $C(X) = (3X - 1)(5X - 2) + (X + 2)^2$,

d) $D(X) = (5X - 3)(3X + 1) - (2X - 4)(-X + 5)$,

e) $E(X) = (1{,}5X - 5)(1{,}5X + 5) - (X - 1)^2$,

f) $F(X) = (5X + 2)^2 - (X - 3)^2$,

g) $G(X) = (3X - 2)^2 - (5 - 4X)(4 - 6X)$,

h) $H(X) = (X - 1)(2X + 3) + (X - 1)(X + 2)$,

i) $I(X) = (2X - 5)(2X + 5)$,

j) $J(X) = (3X + 1)(7X - 2) + (X - 2)^2$,

k) $K(X) = (4X - 3)(3X + 2) - (2X + 5)(X - 3)$,

l) $L(X) = (1{,}5X - 2)(1{,}5X + 2) - (X + 3)^2$,

m) $M(X) = (3X - 2)^2 - (X - 4)^2$,

n) $N(X) = (3X + 1)^2 - (5 - 4X)(2 + 3X)$,

o) $P(X) = (X - 1)(2X + 2) + (X - 1)(2X + 2)$,

p) $Q(X) = (X + 1)(X - 3) + (X + 1)(3X + 1)$,

q) $R(X) = (2X - 4)(X - 1) - (X - 2)(3X + 2)$,

r) $S(X) = (X - 3)(X + 2) - (X - 2)(2X + 1)$,

s) $T(X) = (X + 1)(X - 4) - (2X + 8)(X + 5)$,

t) $U(X) = (3X - 2)^2 - (5X - 4)(2 + 3X)$,

u) $V(X) = (X + 2)(2X - 3) + (X - 1)(X + 2)$.

Exercice 7.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x+8)(x-7) = -2x^2 + 22x - 56$,
2. $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1-x)(x+3)$,
3. $-3(x-3)^2 + 3 = -3(x-4)(x-2)$.

Exercice 8.

Vérifiez que les trois formes proposées, A, B et C, correspondent à une même expression polynomiale.

a) $A(x) = (x-3)(x+5)$.
   $B(x) = x^2 + 2x - 15$.
   $C(x) = (x+1)^2 - 16$.

b) $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$.
   $B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
   $C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$

c) $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$.
   $B(x) = (2x-1)(x+2)$.
   $C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.

Exercice 9.

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?

Correction de l'exercice 9

Nous allons faire une démonstration par analyse-synthèse.
Notons $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Analyse.
Supposons que $f(x) = (x+1)(ax+b)$.
Comme
$$(x+1)(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b,$$
et donc
$$ax^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 3x + 4.$$

L'écriture sous forme développée, réduite et ordonnée étant unique, nous identifions les coefficients :
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Et donc : $a = 1$, $b = -4$ et $b = 4$.

Synthèse.

Les seules solutions possibles doivent vérifier à la fois $ab = 1 \times (-4) = -4$ mais aussi $b = 4$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solution au problème.

Il n'est donc pas possible de trouver une écriture de $x^2 - 3x + 4$ de la forme $(x+1)(ax+b)$.

Démonstration plus brève. Raisonnement par l'absurde.

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons trouvé des nombres a et b tels que pour tout x réel $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Alors en particulier, pour $x = -1$, $8 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Exercice 10.

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1-x^5}{1-x}.$$

Correction de l'exercice 10

Il est possible d'utiliser le produit en croix.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Démontrer :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1-x^5}{1-x}$$

équivaut à démontrer :

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)(1-x) = \frac{1-x^5}{1-x}(1-x)$$

Or :

$$\begin{aligned}
&\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)(1-x) \\
&= 1\times x^4 + 1\times x^3 + 1\times x^2 + 1\times x + 1\times 1 - x\times x^4 + x\times x^3 - x\times x^2 - x\times x - x\times 1 \\
&= 1 - x^5
\end{aligned}$$

II Équations polynomiales de degré un (fonctions affines).

III Équations polynomiales de degré deux.

Exercice 11.
Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$.

Correction de l'exercice 11

Déterminons les solutions de l'équation.

1. Nature de l'équation.
   $P(X) = -3X^2 - 6X + 24$ est un polynôme du second degré : $a = -3$, $b = -6$ et $c = 24$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 24\\ &= 324\end{aligned}$$

   Comme Δ est strictement positif l'équation admet deux solutions distinctes.
3. Calcul des solutions.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-(-6) - \sqrt{324}}{2 \times (-3)}$$
$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-(-6) + \sqrt{324}}{2 \times (-3)}$$
$$x_2 = -4$$

4. Conclusion.

L'ensemble des solutions de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$ est $\mathcal{S} = \{-4; 2\}$.

Exercice 12.
Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X) = 2X^2 + 24X + 72$.

Correction de l'exercice 12

Déterminons les racines de f.

1. Nature de la fonction.
   Il s'agit d'un polynôme de degré deux avec : $a = 2$, $b = 24$ et $c = 72$.

2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 24^2 - 4 \times 2 \times 72 \\ &= 0\end{aligned}$$

Comme Δ est nul l'équation admet une solution (double).

3. Calcul de la solution.

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{-b}{2a} \\ x_0 &= \frac{-24}{2 \times 2} \\ x_0 &= -6\end{aligned}$$

4. Conclusion.

La forme factorisée de P est donc

$$P(X) = 2(X+6)^2.$$

Exercice 13.
Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + x + 1$.

Correction de l'exercice 13

1. Nature de la fonction.
   $X^2 + X + 1$ est un polynôme de degré deux avec : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= -3\end{aligned}$$

Comme Δ est strictement négatif le polynôme n'admet aucune racine.

3. Conclusion.

L'ensemble des zéros de f est $\mathcal{S} = \varnothing$.

IV Équations polynomiales de degré trois ou plus.