Résoudre des équations polynomiales.

I Les polynômes.

1 Généralités, vocabulaire.

Les monômes sont des expressions algébriques formées du produit d'un *coefficient a* réel par une puissance d'une *indéterminée* $\mathbf{X}$: $a\mathbf{X}^n$.

Exemples de monômes : $4\mathbf{X}^0 = 4$, $-3\mathbf{X}^1 = -3\mathbf{X}$, $\pi\mathbf{X}^2$, $12,5\mathbf{X}^7$ et $0\mathbf{X} = 0$

L'exposant de $\mathbf{X}$ est appelé le *degré* du monôme. Par exemple : $-3\mathbf{X}$ est de degré 1 , $\pi\mathbf{X}^2$, est de degré 2 , $12,5\mathbf{X}^7$ est de degré 7 , 4 est de degré 0 et $0\mathbf{X} = 0$ est de degré $-\infty$.

Un *polynôme* est une somme (finie) de monômes.
Par exemple : $-3 + 8\mathbf{X}^2 + 4\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^3 - 7\mathbf{X} + 10$ est un polynôme.
On dit qu'un polynôme est *réduit* lorsque tout ses monômes sont de degrés distincts. Ainsi $3\mathbf{X}^2 - 12\mathbf{X}^5 + 2$ est sous forme réduite mais $5 + 7\mathbf{X} - 14\mathbf{X}^2 + 8\mathbf{X}$ n'est pas sous forme réduite car les monômes $7\mathbf{X}$ et $8\mathbf{X}$ sont semblables (même degré).

Exercice 1.

Donnez la forme réduite des polynômes suivants :

a) $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$

b) $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12$

c) $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12$

Correction de l'exercice 1

a) $-3\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 4\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2 = -3\mathbf{X}^2 + 3\mathbf{X} + 12\mathbf{X}^3 + 2$

b) $7\mathbf{X}^{25} - 8\mathbf{X} + 3 + \mathbf{X} - 7\mathbf{X} + 12 = 7\mathbf{X}^{25} - 14\mathbf{X} + 15$

c) $3\mathbf{X}^2 + 2\mathbf{X} + 4\mathbf{X} + 12 = 3\mathbf{X}^2 + 6\mathbf{X} + 12$

Le degré d'un polynôme réduit est le plus grand degré de ses monômes.

Un polynôme réduit est dit *ordonné* lorsque ses monômes sont rangés suivant les puissances décroissantes de l'indéterminée $\mathbf{X}$. Par exemple $-7\mathbf{X}^3 + \mathbf{X} - 3$ est ordonné alors que $\mathbf{X} - 7\mathbf{X}^2 + 2$ ne l'est pas.

Exercice 2.

Donnez la forme ordonnée et réduite des polynômes suivants :

a) $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X}$

b) $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2$

c) $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9$

Correction de l'exercice 2

a) $4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 7\mathbf{X} - 14 + 3\mathbf{X} = 4\mathbf{X}^3 - 2\mathbf{X}^2 + 10\mathbf{X} - 14$

b) $23 + \mathbf{X} + \mathbf{X}^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{X} + 23$

c) $3\mathbf{X} + 4\mathbf{X}^2 + 9\mathbf{X} + 9 = 4\mathbf{X}^2 + 12\mathbf{X} + 9$

Les polynômes ont ceci de merveilleux qu'ils peuvent s'appliquer à un très grand nombre d'objets **X** peut désigner des nombres bien sûr mais aussi d'autres polynômes, des fonctions, des transformations géométriques, des tableaux de nombres (matrices), etc.

2 Développer, réduire et ordonner.

Dans la suite les indéterminées, **X**, seront notées comme des variables (x).

$x^2(3x-1)$ n'est, a priori, pas un polynôme puisque ce n'est pas une somme de monômes. Cependant en distribuant x^2 :

$$\begin{aligned} x^2(3x-1) &= x^2 3x - x^2 1 \\ &= x^2 3x^1 - x^2 \\ &= 3x^{2+1} - x^2 \\ &= 3x^3 - x^2 \end{aligned}$$

Ainsi $x^2(3x-1) = 3x^3 - x^2$ est bien un polynôme de degré 3.

Afin d'identifier chaque polynôme la convention est de l'écrire sous forme développée, réduite et ordonnée.

Définition 1

Deux polynômes sont dits *égaux* lorsqu'ils ont la même expression développée, réduite et ordonnée.

3 La boîte à outil pour développer.

Proposition 1

Les lettres a, b, c, d désignent des nombres, des expressions algébriques ou des fonctions numériques.

(i) *Distributivité* de la multiplication sur l'addition : $a(b+c) = ab + ac$

(ii) Double distributivité : $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

(iii) *Identités remarquables* :

. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

. $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Démonstration

(i) La distributivité n'est pas démontrable. C'est un axiome de la construction de la multiplication de l'ensemble des nombres réels.

(ii) On applique en deux temps la propriété de distributivité.

(iii) Les égalités se démontrent en partant du membre de gauche vers faisant :

. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ puis on utilise la double distributivité.

. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ puis on utilise la double distributivité.

. En utilisant la double distributivité.

■

4 Racines et équations polynomiales.

Des équations sont dites polynomiales lorsqu'elles consiste en l'égalité de deux polynômes.

Pour résoudre une équation polynomiale nous commençons par nous ramener à une équation nulle. Cela permet de, parfois, simplifier l'équation :

$$X^7 - 2X + 3 = X^7 + 4 \Longleftrightarrow 2X + 1 = 0$$

mais surtout cela permet de classer les équations suivant le degré du polynôme. Ainsi $X^7 - 2X + 3 = X^7 + 4$ qui semble de degré 7 est en fait une équation polynomiale de degré 1.

Nous aurons des méthodes de résolution distinctes suivant le degré du polynôme (voir ci-dessous).

Les solutions d'une équation polynomiales sont appelées les *racines* du polynômes (une fois obtenue l'égalité à 0).

5 Exercice.

Exercice 3.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions suivantes.

a) $A(x) = 4x(x+3)$.

b) $B(x) = (3+x)(2x-1)$.

c) $C(x) = (x+3)^2$.

d) $D(x) = (2x-4)^2$.

e) $E(x) = (-x+5)(-x-5)$.

Correction de l'exercice 3

a) En utilisant la distributivité :

$$\begin{aligned} A(x) &= 4x \times x + 4x \times 3 \\ &= 4x^2 + 12x \end{aligned}$$

b) En utilisant la double distributivité :

$$\begin{aligned} B(x) &= (3+x)(2x+(-1)) \\ &= 3 \times 2x + 3 \times (-1) + x \times 2x + x \times (-1) \\ &= 6x - 3 + 2x^2 - x \\ &= 2x^2 + 6x - x - 3 \\ &= 2x^2 + 5x - 3 \end{aligned}$$

c) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Avec $a = x$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} C(x) &= x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

d) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Avec $a = 2x$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned} D(x) &= (2x)^2 - 2 \times (2x) \times 4 + 4^2 \\ &= 2^2x^2 - 16x + 16 \\ &= 4x^2 - 16x + 16 \end{aligned}$$

e) Nous utiliserons ici une identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$. Avec $a = -x$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} E(x) &= (-x)^2 - 5^2 \\ &= x^2 - 15 \end{aligned}$$

Exercice 4.

Développez, réduisez puis ordonnez les expressions suivantes :

a) $A(x) = (x-1)(x-2)$

b) $B(x) = (x-2)(x^2+3) - (x+2)x^2$

c) $C(x) = (x+5)^2$

d) $D(x) = (x-5)^2$

e) $E(x) = (x+5)(x-5)$

f) $F(x) = (2x-7)^2$

g) $G(x) = (3+2x)^2$

h) $H(x) = (11-x)(11+x)$

i) $I(x) = \left(3x + \frac{5}{6}\right)^2$

j) $J(x) = \left(7x - \frac{1}{3}\right)^2$

k) $K(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{5}{6}\right)$

l) $L(x) = (5-11x)^2$

m) $M(x) = (12+13x)^2$

n) $N(x) = (9x-4)(4+9x)$

o) $O(x) = \left(10x + \frac{1}{3}\right)^2$

p) $P(x) = (-x+1,2)^2$

q) $Q(x) = (0,7-x)(0,7+x)$

r) $R(x) = (11x-12)^2$

Exercice 5.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(X) = (3X+4)(X-5)$,

b) $B(X) = 12(X-3) - 14(X+4)$,

c) $C(X) = 11(X-9) - 7(X-1)$,

d) $D(X) = 28X(3X^2 - 4X + 12)$,

e) $E(X) = 3,2X^2(5X^2 - 12X - 1,1)$,

f) $F(X) = -2X(3X - X + 2)$,

g) $G(X) = 5X(X-3)$,

h) $H(X) = 3X^2(2X^2 - X + 4)$,

i) $K(X) = (X+3)(X+4)$,

j) $L(X) = (2X+1)(X+2)$,

k) $M(X) = (3X-2)(2X+3)$,

l) $N(X) = (X-5)(X-2)$,

m) $P(X) = (2X-1)(4X+3)$,

n) $Q(X) = (2X-7)^2$,

o) $R(X) = (5X-2)(X+4)$,

p) $S(X) = (3X+1,5)(2X-3)$,

q) $T(X) = (5X-7)(0,5X-1,2)$,

r) $U(X) = (2X-1,1)(X+4)$,

s) $V(X) = (X-7)(X+7)$.

Correction de l'exercice 5

a) $P_1(X) = 3X^2 - X - 20$

b) $P_2(X) = -2X - 92$

c) $P_3(X) = 4X - 92$

d) $P_4(X) = 54X^3 - 112X^2 + 336X$

e) $P_5(X) = 16X^4 - 38,4X^3 - 3,52X^2$

f) $P_7(X) = -4X^2 - 4X$

g) $P_8(X) = 5X^2 - 3X$

h) $P_9(X) = 6X^4 - 3X^3 + 12X^2$

i) $P_{10}(X) = X^2 + 7X + 12$

j) $P_{11}(X) = 2X^2 + 5X + 2$

k) $P_{12}(X) = 6X^2 + 5X - 6$

l) $P_{13}(X) = X^2 - 7X + 10$

Exercice 6.

Développez, ordonnez puis réduisez les expressions polynomiales.

a) $A(x) = (2X - 3)^2$,

b) $B(X) = \left[(2X^2 - 2X + 3) - (2X^2 + 3)\right](5X^2 - 4X + 3)$,

c) $C(X) = (3X - 1)(5X - 2) + (X + 2)^2$,

d) $D(X) = (5X - 3)(3X + 1) - (2X - 4)(-X + 5)$,

e) $E(X) = (1,5X - 5)(1,5X + 5) - (X - 1)^2$,

f) $F(X) = (5X + 2)^2 - (X - 3)^2$,

g) $G(X) = (3X - 2)^2 - (5 - 4X)(4 - 6X)$,

h) $H(X) = (X - 1)(2X + 3) + (X - 1)(X + 2)$,

i) $I(X) = (2X - 5)(2X + 5)$,

j) $J(X) = (3X + 1)(7X - 2) + (X - 2)^2$,

k) $K(X) = (4X - 3)(3X + 2) - (2X + 5)(X - 3)$,

l) $L(X) = (1,5X - 2)(1,5X + 2) - (X + 3)^2$,

m) $M(X) = (3X - 2)^2 - (X - 4)^2$,

n) $N(X) = (3X + 1)^2 - (5 - 4X)(2 + 3X)$,

o) $P(X) = (X - 1)(2X + 2) + (X - 1)(2X + 2)$,

p) $Q(X) = (X + 1)(X - 3) + (X + 1)(3X + 1)$,

q) $R(X) = (2X - 4)(X - 1) - (X - 2)(3X + 2)$,

r) $S(X) = (X - 3)(X + 2) - (X - 2)(2X + 1)$,

s) $T(X) = (X + 1)(X - 4) - (2X + 8)(X + 5)$,

t) $U(X) = (3X - 2)^2 - (5X - 4)(2 + 3X)$,

u) $V(X) = (X + 2)(2X - 3) + (X - 1)(X + 2)$.

Exercice 7.

Démontrez les égalités proposées, valables pour tout x réel.

1. $(-2x+8)(x-7) = -2x^2 + 22x - 56$,
2. $-9 + 6x + 3x^2 = -3(1-x)(x+3)$,
3. $-3(x-3)^2 + 3 = -3(x-4)(x-2)$.

Correction de l'exercice 7

♡

Exercice 8.

Vérifiez que les trois formes proposées, A, B et C, correspondent à une même expression polynomiale.

a) $A(x) = (x-3)(x+5)$.
$B(x) = x^2 + 2x - 15$.
$C(x) = (x+1)^2 - 16$.

b) $A(x) = x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$.
$B(x) = (x - 3\sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
$C(x) = (x - \sqrt{2})^2 - 8$

c) $A(x) = 2x^2 + 3x - 2$.
$B(x) = (2x-1)(x+2)$.
$C(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$.

Exercice 9.

Est-il possible que $x^2 - 3x + 4$ s'écrive pour tout x réel comme un produit de la forme $(x+1)(ax+b)$ avec a et b réels ?

Correction de l'exercice 9

Nous allons faire une démonstration par analyse-synthèse.
Notons $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Analyse.
Supposons que $f(x) = (x+1)(ax+b)$.
Comme

$$(x+1)(ax+b) = ax^2 + (a+b)x + b,$$

et donc

$$ax^2 + (a+b)x + ab = x^2 - 3x + 4.$$

L'écriture sous forme développée, réduite et ordonnée étant unique, nous identifions les coefficients :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

Et donc : $a = 1$, $b = -4$ et $b = 4$.

Synthèse.

Les seules solutions possibles doivent vérifier à la fois $ab = 1 \times (-4) = -4$ mais aussi $b = 4$ ce qui est impossible donc il n'y a pas de solution au problème.

Il n'est donc pas possible de trouver une écriture de $x^2 - 3x + 4$ de la forme $(x+1)(ax+b)$.

Démonstration plus brève. Raisonnement par l'absurde.

Raisonnons par l'absurde en supposant que nous avons trouvé des nombres a et b tels que pour tout x réel $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Alors en particulier, pour $x = -1$, $8 = 0$, ce qui est impossible.

Nous avons donc démontré par l'absurde qu'il n'est pas possible de trouver a et b tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 3x + 4 = (x+1)(ax+b)$.

Exercice 10.

Soit x un nombre réel différent de 1, démontrez que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}.$$

Correction de l'exercice 10

Il est possible d'utiliser le produit en croix.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Démontrer :

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{1 - x^5}{1 - x}$$

équivaut à démontrer :

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right)(1 - x) = \frac{1 - x^5}{1 - x}(1 - x)$$

Or :

$$\begin{aligned}&\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)(1-x)\\&=1\times x^4+1\times x^3+1\times x^2+1\times x+1\times 1-x\times x^4+x\times x^3-x\times x^2-x\times x-x\times 1\\&=1-x^5\end{aligned}$$

II Équations polynomiales de degré un (fonctions affines).

III Équations polynomiales de degré deux.

La démarche vue dans les deux exercices précédents se généralise.
La forme canonique de la fonction $P(x)=ax^2+bx+c$ est :

$$P(X)=a\left(X-\frac{-b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

En résolvant l'équation comme on l'a fait précédemment :

$$\left(x-\frac{-b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

Pour pouvoir prendre la racine carré des deux côtés de l'égalité il faut d'abord s'assurer qu'il s'agit de nombres positifs.

Pour cela je cherche le signe du nombre b^2-4ac.

Définition 2

Soient a, b et c des réels.

On appelle *discriminant* du polynôme de degré deux aX^2+bX+c le nombre réel :

$$\Delta=b^2-4ac.$$

Proposition 2

Soient a, b et c des réels.

(i) Si $\Delta > 0$ alors le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

(ii) Si $\Delta = 0$ alors le polynôme $aX^2 + bX + c$ admet une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

(iii) Si $\Delta < 0$ alors $aX^2 + bX + c$ n'admet aucune racine réelle mais il admet deux racines complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Exemples.

1. $P(X) = X^2 + 5X + 6$.
2. $P(X) = 9X^2 + 6X + 1$.
3. $P(X) = X^2 + X + 3$.

Exercice 11.

Déterminez les solutions réelles de l'équation $-3x^2 - 6x + 24 = 0$.

Correction de l'exercice 11

Déterminons les solutions de l'équation.

1. Nature de l'équation.
   $P(X) = -3X^2 - 6X + 24$ est un polynôme du second degré : $a = -3$, $b = -6$ et $c = 24$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \times (-3) \times 24 \\ &= 324\end{aligned}$$

Comme Δ est strictement positif l'équation admet deux solutions distinctes.

3. Calcul des solutions.

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{324}}{2\times(-3)}$$
$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-(-6)+\sqrt{324}}{2\times(-3)}$$
$$x_2 = -4$$

4. Conclusion.

L'ensemble des solutions de l'équation $-3x^2-6x+24=0$ est $\mathcal{S}=\{-4;2\}$.

Exercice 12.

Déterminez, si possible, la forme factorisée de $P(X)=2X^2+24X+72$.

Correction de l'exercice 12

Déterminons les racines de f.

1. Nature de la fonction.
   Il s'agit d'un polynôme de degré deux avec : $a=2$, $b=24$ et $c=72$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 24^2-4\times2\times72\\ &= 0\end{aligned}$$

   Comme Δ est nul l'équation admet une solution (double).
3. Calcul de la solution.

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$
$$x_0 = \frac{-24}{2\times2}$$
$$x_0 = -6$$

4. Conclusion.

La forme factorisée de P est donc

$$P(X)=2(X+6)^2.$$

Exercice 13.

Déterminez les éventuels zéros de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x\mapsto x^2+x+1$.

Correction de l'exercice 13

1. Nature de la fonction.
   $X^2 + X + 1$ est un polynôme de degré deux avec : $a = 1$, $b = 1$ et $c = 1$.
2. Calcul du discriminant.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 1^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= -3\end{aligned}$$

   Comme Δ est strictement négatif le polynôme n'admet aucune racine.
3. Conclusion.

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } f \text{ est } \mathcal{S} = \varnothing.}$$

IV Équations polynomiales de degré trois ou plus.

Les outils seront vus en deuxième année.