Plan d'étude d'une fonction.

I Les étapes.

II Mise en œuvre, applications.

Exercice 1. - fonction polynomiale.
Étudiez la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ et tracez sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On pourra démontrer que $S(1{,}0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2. - fonction polynomiale.
Étudiez la fonction $f : x \mapsto -x^3 - 2x + 4$ et tracez sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On pourra démontrer que $S(0{,}4)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3. - fonction polynomiale.
Soient a, b et c trois réels et soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par : $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$.
on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère et A le point de coordonnées $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ dans ce repère.

1. Déterminez a, b et c pour que les trois propriétés suivants soient vérifiées simultanément :
   (i) $f(0) = f(2)$.
   (ii) $\mathscr{C}_f$ passe par le point A.
   (iii) Au point A la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
2. Étudiez les variations de la fonction g définie sur $[0;2]$ par : $g(x) = x^4 - 4x^3 + ac113x^2 - 3x$.
   Tracez la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les unités graphiques étant : 4 cm sur l'axe des abscisses et 16 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 4. - fonction rationnelle.

Soient $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 3}{2x + 4}$ une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Déterminez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Étudiez les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$ et en déduire une asymptote à la courbe de f.
3. Montrez qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x + 4}$.
   Déduisez-en une deuxième asymptote à $\mathscr{C}_f$.
4. Déterminez le point d'intersection S des deux asymptotes.
   Montrez que S est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
5. Étudiez le sens de variation de f puis dressez son tableau de variation.
6. Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 5. - fonction rationnelle.

Soient $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(x - 2)}$ une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$ orthogonal.

1. Donnez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Déterminez deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$.
3. Montrez que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
4. Étudiez les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$ et en déduire les asymptotes à $\mathscr{C}_f$.
5. Étudiez le sens de variation de f.
6. Déterminez une équation à la droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.
   La droite T a-t-elle un autre point commun avec $\mathscr{C}_f$?
7. Tracez $\mathscr{C}_f$ et T.

Exercice 6. - fonction rationnelle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{9}{2x+1}$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,; \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

1. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et que $f'(x) = \dfrac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$.

   Déduisez-en les variations de f.
2. (a) Déterminez la limite de f en $+\infty$ puis celle en $-\infty$.
   (b) Étudiez les limites de f à droite et à gauche en $-\frac{1}{2}$.
   Déduisez-en que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale dont on précisera une équation.
   (c) Démontez que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à l courbe $\mathscr{C}_f$.
   (d) Étudiez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 7. - fonction rationnelle.

Faites l'étude complète de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$.

Exercice 8. - fonction rationnelle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{8}{x^2+3}$; on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. Déterminez la limite du quotient $\frac{8}{x^2+3}$ quand x tend vers $-\infty$ puis $+\infty$.
2. (a) Déterminez la fonction f' dérivée de f, et vérifiez que pour tout x réel, on peut écrire :
   $$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}.$$
   (b) Déduisez-en le sens de variation de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$.
   (a) Étudiez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminez le plus petit entier n tel que : si $|x| \geqslant n$, alors $|f(x) - (x-1)| \leqslant 10^{-1}$.
   Donnez une interprétation géométrique de ce résultat.
4. Montrez qu'il existe un point A et un seul , de la courbe $\mathscr{C}_f$, en lequel la tangente Δ est parallèle à $\mathscr{D}$. Précisez les coordonnées d A.
5. Construisez $\mathscr{D}$, Δ et $\mathscr{C}_f$ sur une même figure.

Exercice 9. - fonction irrationnelle.
Étudiez le fonction f définie par $f(x)=\sqrt{9-4x^2}$.
Avant de tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, vous étudierez la dérivabilité de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 10. - fonction irrationnelle.
Faites l'étude complète de la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Exercice 11. - fonction irrationnelle.
Faites l'étude complète de la fonction définie par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ sera représentée dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $||\vec{i}||=2$ cm et $||\vec{j}||=4$ cm.

Exercice 12. - fonction circulaire.
Étudiez les variations de la fonction définie par $f(x)=\sin(2x)+1$.

Exercice 13. - fonction circulaire.
Étudions la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x)=\sin^2(x)-\cos(x)$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrez que l'intervalle d'étude de f peut se réduire à $\mathscr{D}_f=[0,\pi]$.
2. Étudiez le sens de variation de f et dressez son tableau de variation.
3. Résolvez dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x)=0$.
4. Donnez une équation de la droite T tangente à $\mathscr{C}_f$, au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
5. Construisez la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T.

Exercice 14. - fonction circulaire.
Faites l'étude complète des fonctions suivantes.

1. f définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=\sin^3(x)\cos(x)$.
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos^2(x)\sin(2x)$.
3. h définie par $h(x)=\dfrac{\sin(x)+2}{2\sin(x)+1}$.
4. φ définie par $\varphi(x)=\dfrac{\sin(x)+1}{\cos(x)+1}$.