Plan d'étude d'une fonction.

I Les étapes.

II Mise en œuvre, applications.

Exercice 1. - fonction polynomiale.
Étudiez la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2$ et tracez sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.
On pourra démontrer que $S(1,0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

Correction de l'exercice 1

Je fais le choix de ne pas utiliser la symétrie proposée par l'énoncé dans cette correction.

1. f est une fonction polynomiale donc elle est définie sur $\mathbb{R}$: $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. (a) Le fait que la fonction soit formée de fonctions toutes paires ou toutes impaires peut laisse deviner une parité. Ici $x \mapsto x^3$ est impaire tandis que $x \mapsto x^2$ est paire : elle ne sera donc probablement ni l'une ni l'autre. Vérifions avec un contre exemple simple.
   $f(-1) = -2$ et $f(1) = 0$. f n'est donc ni paire ni impaire.
   (b) Rien ne laisse supposer qu'il y aura de périodicité : pas de cosinus, sinus ou tangente,...).
   (c) Pas de restriction du domaine de définition nous devons étudier f sur $\mathbb{R}$.
3. Étudions les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

   Nous devons donc étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   $x^3 - 3x^2 + 2 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^3$ donc

   $$\boxed{f \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f \underset{-\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$
4. (a) Étude de la dérivabilité de f.

   f est une fonction polynomiale donc

   $$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathscr{D}_f = \mathbb{R}.}$$

   (b) Déterminons f' sur $\mathbb{R}$.

   f étant polynomiale on peut donner directement la fonction dérivée.

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 - 6x.}$$

(c) Étudions le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f'(x) = 3x(x-2)$, d'où

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
3		$+$		$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

De $f(0) = 2$, $f(2) = -2$ et des questions précédentes nous déduisons :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

6. Pas d'asymptote horizontale ou verticale. Pas d'asymptote oblique évidente ou suggérée par l'énoncé.
7. En choisissant quelques valeurs simples à calculer mentalement.

x	-2	-1	1	3
$f(x)$	-18	-2	0	2

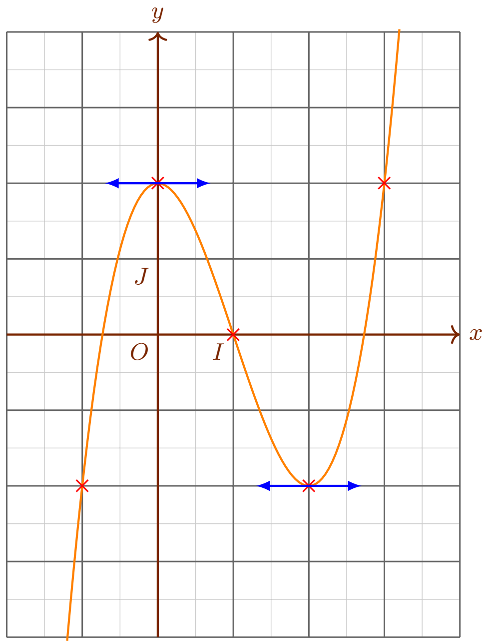
8. Puisque f' s'annule en 0 et 2, $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes horizontales au points d'abscisses 0 et 2.
9. Traçons $\mathscr{C}_f$.

   Les calculs d'images et les variations (extrema du tableau de variation) nous incite à nous limiter au segment $[-2{,}4]$ du domaine de définition et des ordonnées limitées à $[-4{,}4]$.

   (a) D'après 7 et les extrema du tableau de variation nous pouvons placer quelques points.

   (b) D'après le signe de f', question 4(c) nous avons deux tangentes horizontales.

(c) On trace enfin approximativement la courbe grâce au tableau de variation et aux limites en $\pm\infty$.



Exercice 2. - fonction polynomiale.

Étudiez la fonction $f : x \mapsto -x^3 - 2x + 4$ et tracez sa courbe représentative dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On pourra démontrer que $S(0,4)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

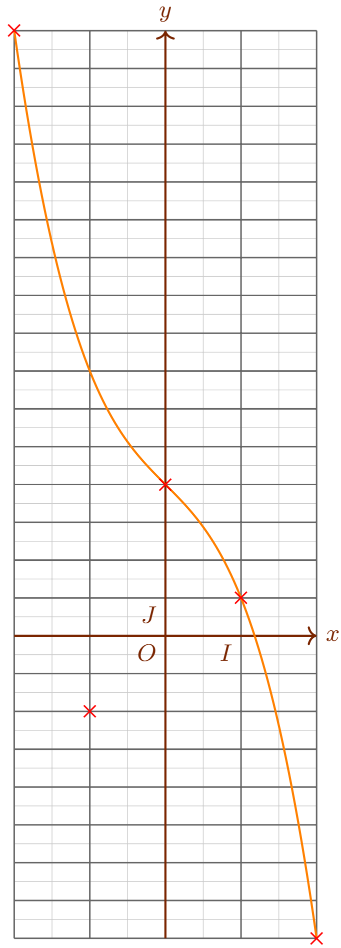
Correction de l'exercice 2

Étudions f.

1. f est polynomiale donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. f n'est a priori pas périodique.
   $f(-1) = 7$ et $f(1) = 1$ donc f n'est ni paire ni impaire.
3. $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} -3x^3$ donc $f \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f \underset{-\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
4. f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel : $f'(x) = -3x^2 - 2$.
   Clairement $f'(x) < 0$ pour tout x réel.
5. On en déduit f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
6. Pas d'asymptote.
7. Quelques images simples :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	16	-2	4	1	-8

8. Aucune tangente horizontale.
9. Traçons $\mathscr{C}_f$.



Exercice 3. - fonction polynomiale.

Soient a, b et c trois réels et soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par : $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$.

on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère et A le point de coordonnées $\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ dans ce repère.

1. Déterminez a, b et c pour que les trois propriétés suivants soient vérifiées simultanément :

   (i) $f(0) = f(2)$.

   (ii) $\mathscr{C}_f$ passe par le point A.

   (iii) Au point A la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

2. Étudiez les variations de la fonction g définie sur $[0;2]$ par : $g(x) = x^4 - 4x^3 + ac113x^2 - 3x$.

   Tracez la courbe représentative de g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les unités graphiques étant : 4 cm sur l'axe des abscisses et 16 cm sur l'axe des ordonnées.

Exercice 4. - fonction rationnelle.

Soient $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x + 3}{2x + 4}$ une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Déterminez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Étudiez les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$ et en déduire une asymptote à la courbe de f.
3. Montrez qu'il existe trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x + 4}$.

   Déduisez-en une deuxième asymptote à $\mathscr{C}_f$.
4. Déterminez le point d'intersection S des deux asymptotes.

   Montrez que S est un centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.
5. Étudiez le sens de variation de f puis dressez son tableau de variation.
6. Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

Correction de l'exercice 4

1. f est définie si et seulement si $2x + 4 \neq 0$. Or : $2x + 4 = 0 \iff x = -2$, donc

$$\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}.}$$

2. Étudions les limites de f aux bornes de $\mathscr{D}_f$.

* $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{2}x$ donc

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

* $\lim\limits_{x\to-2} x^2 - 5x + 3 = 17$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} 2x + 4 = 0^-$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} 2x + 4 = 0^+$ donc

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x) = -\infty.$$

* Nous en déduisons que

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

3. Démontrons que les réels a, b et c existent.

L'une des méthodes pour démontrer une existence consiste à procéder à un raisonnement par analyse synthèse.

* Soit $x \in \mathscr{D}_f$.
Supposons qu'il existe des réels a, b et c tels que

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x+4}.$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(ax+b)(2x+4)+c}{x+4} \\ &= \frac{2ax^2 + 4ax + 2bx + 4b + c}{2x+4} \\ &= \frac{2ax^2 + (4a+2b)x + (4b+c)}{2x+4} \end{aligned}$$

Par identification avec l'expression de l'énoncé nous en déduisons

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 4a + 2b = -5 \\ 4b + c = 3 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{7}{2} \\ c = 17 \end{cases}$$

* On vérifie aisément que $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{7}{2}$ et $c = 17$ conviennent.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\},\ f(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{7}{2} + \tfrac{17}{2x+4}.$$

Comme $f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$ nous en déduisons que

$$f(x) - \left(\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}\right) \underset{x\to\pm\infty}{0}.$$

Par conséquent :

$\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$ en $-\infty$ et $+\infty$.

4. Déterminons les coordonnées de S point d'intersection des deux asymptotes.

   Si S appartient aux deux deux asymptote alors ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} y_S = \frac{1}{2}x_S - \frac{7}{2} \\ x_S = -2 \end{cases}$$

   Donc

$$S\left(-2; -\tfrac{9}{2}\right).$$

   Démontrons que S est centre de symétrie pour $\mathscr{C}_f$.

   Remarquons que $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ est symétrique par rapport à $x_S = -2$.
   Soit $h > 0$.
   Démontrons que $\frac{f(x_S-h)+f(x_S+h)}{2} = y_s$ autrement dit que S est milieu du segment dont les extrémités sont les points de coordonnées $(x_S - h; f(x_S - h))$ et $(x_S + h; f(x_S + h))$.

$$\begin{aligned}
f(x_S - h) + f(x_S + h) &= f(-2-h) + f(-2+h) \\
&= \frac{4 + 4h + h^2 + 10 + 5h + 3}{-4 - 2h + 4} + \frac{4 - 4h + h^2 + 10 - 5h + 3}{-4 + 2h + 4} \\
&= \frac{h^2 + 9h + 7}{-2h} + \frac{h^2 - 9h + 7}{2h} \\
&= \frac{-h^2 - 9h - 7 + h^2 - 9h + 7}{2h} \\
&= -\frac{9}{2} \\
&= y_S
\end{aligned}$$

   Donc

   S est une centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

5. Étudions les variations de f.

   * f est quotient de deux fonctions polynomiales $u : x \mapsto x^2 - 5x + 3$ et $v : x \mapsto 2x + 4$ dont le dénominateur v s'annule en -2 donc f est dérivable sur $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
   * Comme $u'(x) = 2x - 5$ et $v'(x) = 2$ nous en déduisons, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-5)(2x+4) - (x^2 - 5x + 3) \times 2}{(2x+4)^2} \\ &= \frac{4x^2 + 8x - 10x - 20 - 2x^2 + 10x - 6}{(2x+4)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 8x - 26}{(2x+4)^2} \\ &= 2\frac{x^2 + 4x - 13}{(2x+4)^2} \end{aligned}$$

   * f' est du signe de $h : x \mapsto x^2 - 4x - 13$ qui est une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a = 1$, $b - 4$ et $c = -13$.
   $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 1 \times (-13) = 68 = 2^2 \times 17$.
   $\Delta > 0$ donc h admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 2\sqrt{17}}{2 \times 1} = -2 - \sqrt{17}$$

   et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 2\sqrt{17}}{2 \times 1} = -2 + \sqrt{17}.$$

   Puisque le trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses éventuelles racines :

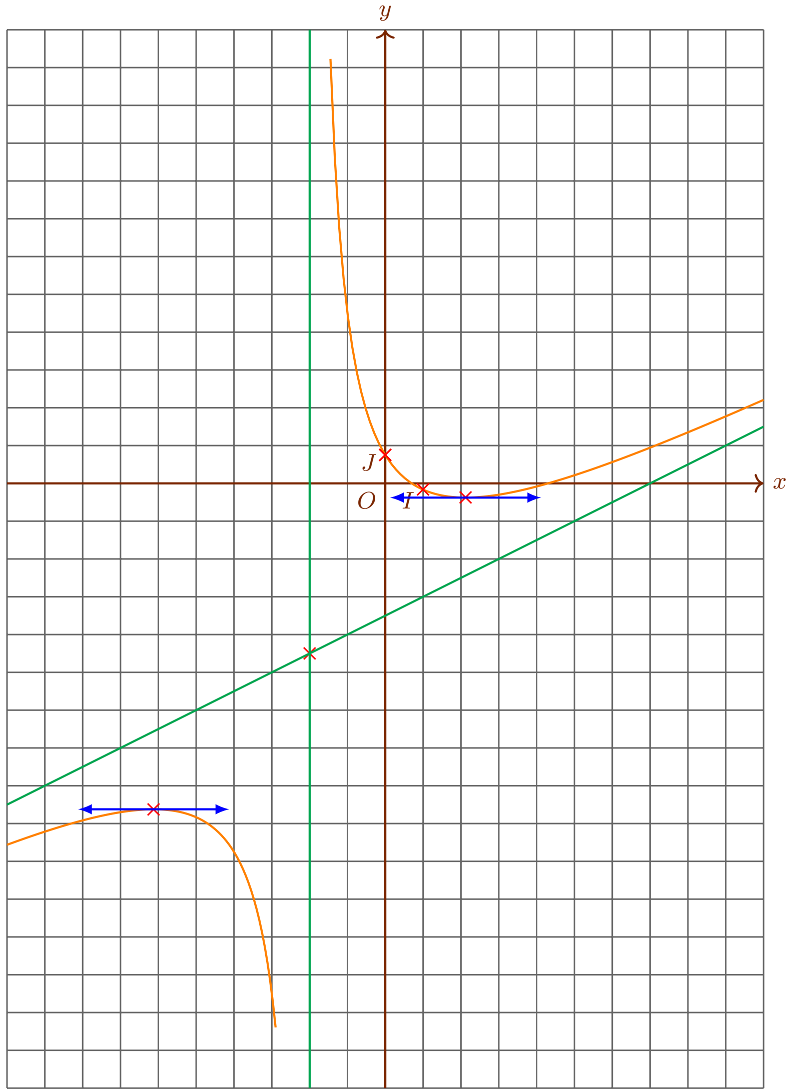
x	$-\infty$		x_1		-2		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

   * Pour les plus motivés : $f\left(-2 - \sqrt{17}\right) = -\frac{9}{2} - \sqrt{17}$ et $f\left(-2 + \sqrt{17}\right) = -\frac{9}{2} + \sqrt{17}$ (l'un ses déduisant de l'autre par symétrie.

Finalement

x	$-\infty$	x_1	-2		x_2	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	$-\frac{9}{2} - \sqrt{17}$	↘ $-\infty$	$\Vert$ $+\infty$ ↘	$-\frac{9}{2} + \sqrt{17}$	↗ $+\infty$

6. Légende : points, tangentes horizontales, asymptotes, courbe.



Exercice 5. - fonction rationnelle.

Soient $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(x-2)}$ une fonction, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthogonal.

1. Donnez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Déterminez deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-2}$.
3. Montrez que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
4. Étudiez les limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$ et en déduire les asymptotes à $\mathscr{C}_f$.
5. Étudiez le sens de variation de f.
6. Déterminez une équation à la droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

   La droite T a-t-elle un autre point commun avec $\mathscr{C}_f$?
7. Tracez $\mathscr{C}_f$ et T.

Exercice 6. - fonction rationnelle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ par : $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{9}{2x+1}$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités graphiques : 2 cm en abscisse et 0,5 cm en ordonnée).

1. Montrez que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ et que $f'(x) = \dfrac{8(x+2)(x-1)}{(2x+1)^2}$.

   Déduisez-en les variations de f.
2. (a) Déterminez la limite de f en $+\infty$ puis celle en $-\infty$.

   (b) Étudiez les limites de f à droite et à gauche en $-\frac{1}{2}$.
   Déduisez-en que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote verticale dont on précisera une équation.

   (c) Démontez que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote à l courbe $\mathscr{C}_f$.

   (d) Étudiez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$.
3. Tracez la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.

Exercice 7. - fonction rationnelle.

Faites l'étude complète de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$.

Exercice 8. - fonction rationnelle.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{8}{x^2+3}$; on appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité : 1 cm).

1. Déterminez la limite du quotient $\frac{8}{x^2+3}$ quand x tend vers $-\infty$ puis $+\infty$.
2. (a) Déterminez la fonction f' dérivée de f, et vérifiez que pour tout x réel, on peut écrire :
$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x^2+2x+9)}{(x^2+3)^2}.$$
   (b) Déduisez-en le sens de variation de f.
3. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$.
   (a) Étudiez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminez le plus petit entier n tel que : si $|x| \geqslant n$, alors $|f(x) - (x-1)| \leqslant 10^{-1}$.
   Donnez une interprétation géométrique de ce résultat.
4. Montrez qu'il existe un point A et un seul , de la courbe $\mathscr{C}_f$, en lequel la tangente Δ est parallèle à $\mathscr{D}$. Précisez les coordonnées d A.
5. Construisez $\mathscr{D}$, Δ et $\mathscr{C}_f$ sur une même figure.

Exercice 9. - fonction irrationnelle.

Étudiez le fonction f définie par $f(x) = \sqrt{9-4x^2}$.
Avant de tracer la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, vous étudierez la dérivabilité de f aux bornes de son ensemble de définition.

Exercice 10. - fonction irrationnelle.

Faites l'étude complète de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$.

Exercice 11. - fonction irrationnelle.

Faites l'étude complète de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ sera représentée dans le plan muni d'un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $||\vec{i}|| = 2$ cm et $||\vec{j}|| = 4$ cm.

Exercice 12. - fonction circulaire.

Étudiez les variations de la fonction définie par $f(x) = \sin(2x) + 1$.

Correction de l'exercice 12

1. La fonction sin étant définie sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
2. (a) sin est impaire mais avec le +1 ce n'est plus le cas. $\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}\right)+1 = 2$ et $\sin\left(2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)+1=0$, donc f n'est ni paire ni impaire.

   (b) Deviner la périodicité demande un peu d'habitude. sin est 2π-périodique donc $\sin(2x)$ est π-périodique. Vérifions-le.
   Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \sin\left(2\times(x+\pi)\right)+1 \\ &= \sin\left(2x+2\pi\right)+1 \end{aligned}$$

   Donc, sinus étant 2π-périodique :

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= \sin(2x)+1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est } \pi \text{ périodique et nous pouvons donc réduire l'étude de } f \text{ à } \mathscr{D} = \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].}$$

3.
4. (a) sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, a fortiori, sur $\mathscr{D}$. Par composition nous en déduisons que

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathscr{D}.}$$

   (b) En utilisant la règle de dérivation d'une fonction composée,

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathscr{D},\ f'(x) = 2\cos(2x).}$$

   (c) $x \mapsto 2\cos(2x)$ étant paire il suffit d'étudier son signe sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.
   Si $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $y = 2x \in [0,\pi]$. D'où

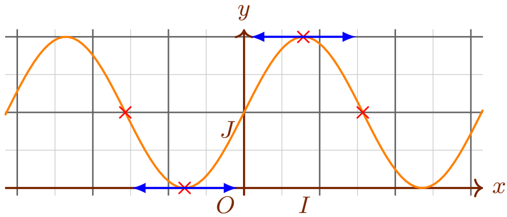
$$\begin{aligned} \cos(y) > 0 &\iff y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ &\iff x \in \left[0,\frac{\pi}{4}\right[\end{aligned}$$

   Enfin

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. Nous en déduisons

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f	1	↘	0	↗	2	↘	1

6. 

Exercice 13. - fonction circulaire.

Étudions la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin^2(x) - \cos(x)$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Montrez que l'intervalle d'étude de f peut se réduire à $\mathscr{D}_f = [0,\pi]$.
2. Étudiez le sens de variation de f et dressez son tableau de variation.
3. Résolvez dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x) = 0$.
4. Donnez une équation de la droite T tangente à $\mathscr{C}_f$, au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.
5. Construisez la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T.

Exercice 14. - fonction circulaire.

Faites l'étude complète des fonctions suivantes.

1. f définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = \sin^3(x)\cos(x)$.
2. g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos^2(x)\sin(2x)$.
3. h définie par $h(x) = \dfrac{\sin(x) + 2}{2\sin(x) + 1}$.
4. φ définie par $\varphi(x) = \dfrac{\sin(x) + 1}{\cos(x) + 1}$.