Nature d'une série.

À la question « Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? » deux réponses sont possibles :
— soit elle converge,
— soit elle diverge.

I Séries de référence.

— Série de terme général q^n, série géométrique.
— Série de terme général n^α, série de Riemann.
— Série de terme général $\frac{x^n}{n!}$, série exponentielle.

Si la série est une série de référence il suffit d'appliquer le résultat du cours.

Il arrive que dans un exercice une série ait déjà été étudiée auquel cas cette série déjà étudiée dans les questions précédentes peut être considérée comme une série de référence.

Parfois une petite modification de l'écriture du terme général permet de reconnaître une série de référence.

Exemples.

1. $\sum 6^n$ est une série géométrique de raison $q = 6$ donc elle diverge.
2. $\sum \mathrm{e}^n$ est une série géométrique de raison $q = \mathrm{e} \approx 2{,}7$ donc elle diverge.
3. $\sum 0{,}95^n$ est une série géométrique de raison $q = 0{,}95$ donc elle converge.
4. $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ donc elle converge.
5. $\sum \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ donc elle converge.
6. $\sum \frac{(-1)^n}{5^n}$ est une série géométrique de raison $q = -\frac{1}{5}$ donc elle converge.
7. $\sum (-4)^n$ est une série géométrique de raison $q = -4$ donc elle diverge.
8. $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$ donc diverge.
9. $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ donc converge.
10. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = \frac{1}{2}$ donc diverge.
11. $\sum n$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = -1$ donc diverge.
12. $\sum n^2$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = -2$ donc diverge.
13. $\sum \sqrt{n}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = -\frac{1}{2}$ donc diverge.
14. $\sum \frac{2^n}{n!}$ est une série exponentielle donc elle converge.

II Divergence grossière.

On étudie la convergence de (u_n).

— Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ il faut poursuivre l'étude.

— Si (u_n) ne converge pas vers 0 (dans tous les autres cas) alors l'étude s'achève et nous concluons :

$\boxed{\sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$

Ceci signifie que $\sum u_n$ diverge.

Exemples.

1. $\sum \frac{1}{n+1}$ n'est pas une série de référence.
$\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on ne peut conclure et il faut avancer dans l'étude de cette série.
2. $\sum \frac{1}{n^2+1}$ n'est pas une série de référence.
$\frac{1}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on ne peut conclure et il faut avancer dans l'étude de cette série.
3. $\sum (n+3)^2$ n'est pas une série de référence.
$(n+3)^2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série diverge grossièrement.
4. $\sum (-n)^n$ n'est pas une série de référence.
$(-n)^n$ diverge sans limite (la sous-suite des termes d'ordre pair tend vers $+\infty$ et celle des termes de rang impair tend vers $-\infty$), donc la série diverge grossièrement.
5. $\sum 1 + \frac{1}{n}$ n'est pas une série de référence.
$1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc la série diverge grossièrement.

III Combinaison linéaire de séries.

Il est possible que la série soit une combinaison linéaire de séries de références.

— Si $\sum u_n$ est une somme d'une série convergente et d'une divergente alors

$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$

— Si $\sum u_n$ est une somme de deux séries convergentes alors

$\boxed{\sum u_n \text{ est convergente la somme de } \sum u_n \text{ est obtenue en ajoutant les sommes.}}$

— Si $\sum u_n$ est la somme de deux séries divergentes alors on ne peut conclure et il faut poursuivre l'étude.

Exemples.

1. $\sum 2^n + \frac{1}{n^2}$. Ce n'est pas une série de référence mais 2^n et $\frac{1}{n^2}$ sont les termes généraux de deux série de référence : $\sum 2^n$ est la série géométrique de raison $q = 2 > 1$ qui diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ est la série de Riemann de paramètre $\alpha = 2$ qui converge. Donc la série somme (des deux précédentes), $\sum 2^n + \frac{1}{n^2}$, est divergente.
2. $\sum \frac{2^n}{n!} + \frac{1}{2^n}$ est convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = e^2 + 2$.
3. $\sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$, qui est la série nulle, est la somme de deux séries divergentes et cette somme converge.
4. $\sum 2^n + 3^n$ est la somme de deux séries divergentes et elle diverge.

IV Regarder le signe de la série : convergence absolue.

Trois cas peuvent être distingués.

— Si la série est à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang) alors il faut poursuivre l'étude.

— Si la série est à termes négatifs (au moins à partir d'un certain rang) alors on poursuit l'étude en considérant la série $\sum -u_n$.

— Si les termes de la séries changent de signe jusqu'au voisinage de l'infini alors il faut étudier la convergence absolue. Autrement dit il faut étudier la convergence de la série $\sum |u_n|$. Il faut donc recommencer tout le travail avec cette nouvelle série $\sum |u_n|$.

À partir de cette étape on suppose donc que la suite (u_n) est à termes positifs.

Si à partir de cette étape on étudie la série $\sum |u_n|$ alors les conclusions seront modifiées comme suit :

— Si $\sum |u_n|$ converge alors nous conclurons

$\sum u_n$ converge absolument donc $\sum u_n$ converge.

— Si $\sum |u_n|$ diverge alors nous ne pouvons rien conclure pour $\sum u_n$.

Remarques.

1. Pour les séries alternées (dont le signe du terme général change régulièrement en fonction du rang) il faut essayer de mettre en évidence des télescopages.

V Règle de d'Alembert.

Si $\sum u_n$ est à termes strictement positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$ avec $q \in \mathbb{R}_+$ alors nous pouvons conclure comme suit.

— Si $0 \leqslant q < 1$ alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

— Si $q > 1$ alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

— Si $q = 1$ alors on peut conclure et il faut poursuivre l'étude de la série.

Exemples.

1. $\sum u_n = \sum \frac{1}{(n!)^2}$ n'est pas une série de référence (ce n'est pas l'exponentielle à cause du carré).
   La série ne diverge pas grossièrement.
   La série est à termes strictement positifs et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.
2. $\sum \frac{n^4+n+1}{2n^4+1}$ diverge.
3. $\sum \frac{n+1}{n^3-2}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

VI Critère de Riemann.

Si $\sum u_n$ est à termes strictement positifs, $n^\alpha u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+$.

VII Comparer à une série de référence : équivalence.

Si le terme général de la série équivaut au terme général d'une série de référence alors $\sum u_n$ est de même nature que cette série de référence.

— Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

— Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ diverge alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

VIII Comparer à une série de référence : petit o.

Si u_n est un petit o d'une série de référence convergente alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

IX Comparer à une série de référence : inégalités.

Si $\sum v_n$ est une série de référence.

— Si $v_n \leqslant u_n$ et $\sum v_n$ diverge alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ diverge.}}$$

— Si $u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge alors

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge et } \sum_{k=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_n.}$$

X Comparaison série-intégrale.