Khôlles de la semaine du 03/04/2023.

Khôlle 0. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (7X^2 - 5)(6X - 8)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le dénominateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{3X}{X+1} + \frac{X+3}{3X+2}.$$

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$ une fonction.
Calculez la dérivée de f puis donnez le tableau de variation de f.

Exercice 3.

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons ;
- 2% des casques non contrefaits présentent un défaut de conception ;
- 10% des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

Quelle est la probabilité qu'un masque qui présente un défaut soit contrefait ?

Exercice 4.

1. Donnez un équivalent de $n^7 - n^2 + 4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez un équivalent de $\dfrac{n^3 + 2n^2 + 4}{7n^4 + 12}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Justifiez que $\dfrac{1}{n^2} + \ln(n) = o(n)$.

4. Justifiez que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$.

5. Donnez un équivalent de $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 5.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = n^4$.

b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{4^n} + \sqrt{n}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n^2 + 3}$.

Exercice 6.

Soients $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculez AB puis BA.

Khôlle 1. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (2X^3 + 1)(3X + 2)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le dénominateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{2X - 2}{X + 3} + \frac{4X}{X - 1}.$$

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x + 7\right)$ une fonction.
Calculez la dérivée de f puis donnez le tableau de variation de f.

Exercice 3.

Le directeur d'une grande entreprise a proposé à l'ensemble de ses salariés un stage de formation à l'utilisation d'un nouveau logiciel. Ce stage a été suivi par 25 % des salariés.Dans cette entreprise, 52 % des salariés sont des femmes, parmi lesquelles 40 % ont suivi le stage.

Quelle est la probabilité qu'un employé qui a suivi le stage soit un homme ?

Exercice 4.

1. Donnez un équivalent de $-3n^4 + 2n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez un équivalent de $\dfrac{-2n^7 + 3n^5 + n}{32n^4 + n^3 + 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Justifiez que $\dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$.

4. Justifiez que $2^n + \dfrac{1}{n^2} \sim 2^n$.

5. Donnez un équivalent de $\sqrt{1 + \frac{1}{2^n}} - 1$.

Exercice 5.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{4^n}$.

b) $u_n = n^{-7}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n} + 0{,}5^n$.

d) $u_n = \dfrac{n^3 + 2n + 12}{4n^4 + n^3}$.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$.
Calculez AB puis BA.

Khôlle 2. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (4X^5 + 3X)(-X + 3)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le dénominateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{3X + 1}{X + 4} + \frac{3X}{-X + 2}.$$

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2\right)^5$ une fonction.
Calculez la dérivée de f puis donnez le tableau de variation de f.

Exercice 3.

Le coyote est un animal sauvage proche du loup, qui vit en Amérique du Nord. Dans l'état d'Oklahoma, aux États-Unis, 70% des coyotes sont touchés par une maladie appelée ehrlichiose. Il existe un test aidant à la détection de cette maladie. Lorsque ce test est appliqué à un coyote, son résultat est soit positif, soit négatif, et on sait que :

- Si le coyote est malade, le test est positif dans 90 % des cas.
- Si le coyote n'est pas malade, le test est négatif dans 80 % des cas.

Quelle est la probabilité que le coyote soit effectivement malade sachant que son test es positif ?

Exercice 4.

1. Donnez un équivalent de $-\frac{4}{5}n^8 - \frac{1}{3}n^3 + 2n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez un équivalent de $\frac{3n^3 + n^2 + n + 5}{2n + 5}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Justifiez que $\dfrac{1}{(\ln(n))^5} + \dfrac{1}{n^3} = o\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^4}\right)$.

4. Justifiez que $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{1}{n^8} \sim \dfrac{1}{n^8}$.

5. Donnez un équivalent de $\ln\left(1 + \dfrac{n^2}{3^n}\right)$.

Exercice 5.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n^6}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{4^n}$.

d) $u_n = \dfrac{-n^3 + n - 5}{2n^3 - n - 1}$.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \\ -5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculez AB puis BA.

Khôlle 3. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (-X^6 + 4X)(5X + 8)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le dénominateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{4X + 2}{3X + 1} + \frac{-2X}{X + 1}.$$

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 12\right)^3}$ une fonction.
Calculez la dérivée de f puis donnez le tableau de variation de f.

Exercice 3.

Une urne contient 2 jetons noirs et 3 jetons blancs. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et sans remise deux jetons de cette urne.

Quelle est la probabilité que le premier jeton prélevé soit blanc sachant que le second est noir ?

Exercice 4.

1. Donnez un équivalent de $\sqrt{4}n^3 + n^2 + 100$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez un équivalent de $\dfrac{-2n^4 + 3n^2 + n + 1}{7n^5 + 5n^4 + 4n^3}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Justifiez que $(\ln(n))^4 + n^3 = o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

4. Justifiez que $n^2 + \dfrac{1}{2^n} \sim n^2$.

5. Donnez un équivalent de $\mathrm{e}^{0,5^n} - 1$.

Exercice 5.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

b) $u_n = 5{,}56^n$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n^4} + \dfrac{1}{4^n}$.

d) $u_n = \dfrac{2{,}2n^2 + 4n + 1}{2n + 7}$.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculez AB puis BA.

Khôlle 4. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (X^5 + 4)(-3X^2 + 2X)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{3X}{2X-1} + \frac{-X}{2X+1}.$$

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \ln\left(x^2 + 4x + 3\right)$ une fonction.
Calculez la dérivée de f puis donnez le tableau de variation de f.

Exercice 3.

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

Lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.

On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.

Quelle est la probabilité que Paul ait pris sa voiture sachant qu'il a raté son train ?

Exercice 4.

1. Donnez un équivalent de $\frac{1}{3}n^7 + n^6 + n^5$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez un équivalent de $\dfrac{3n^3 + 2n^2 + n + 1}{5n^3 + 4n^2 + 4}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Justifiez que $\dfrac{1}{n^3} + \dfrac{1}{3^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

4. Justifiez que $\dfrac{1}{\ln(n)} + 2^n \sim 2^n$.

5. Donnez un équivalent de $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$.

Exercice 5.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n^3} + \sqrt{n}$.

d) $u_n = \dfrac{n^8 + n^7}{n^9 + n^8}$.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 8 & 10 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Calculez AB puis BA.

Khôlle 11. Sujet B.

Exercice 1.

Soit f une fonction définie par $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\left(\ln(|x|)\right)^2 \text{ si } x \neq 0 \end{cases}$

Étudiez f et donnez l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 2.

Chaque jour, un athlète doit sauter une haie en fin d'entraînement. Son entraîneur estime, au vu de la saison précédente que

- si l'athlète franchit la haie un jour, alors il la franchira dans 90 % des cas le jour suivant ;
- si l'athlète ne franchit pas la haie un jour, alors dans 70 % des cas il ne la franchira pas non plus le lendemain.

On note p_n la probabilité que l''athlète réussisse à franchir la haie lors de la n-ième séance.

On considère que $p_0 = 0{,}6$

1. Quelle est la probabilité qu'il réussisse à franchir la haie tous les jours ?
2. Exprimez p_n en fonction de n.

Exercice 3.

1. Justifiez que $\dfrac{4}{n^3} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^2}\right)$.
2. Donnez un équivalent de $\cos\left(\dfrac{1}{4^n} + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{7}{n!}\right) - 1$.
3. Donnez un équivalent de $n^2 + n - \ln\left(n^2 + n\right)$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \sin(n^2 + 1) - \sqrt{n}$.
2. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$.

3. $u_n = \dfrac{n + \cos(n)}{e^n + \sin(n)}$.
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$.
5. $u_n = \ln(1 + v_n)$ où v_n est le terme général d'une série convergente.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrez que $A^3 - A^2 - A + I_3 = 0$ et déduisez-en, que A est inversible et donnez A^{-1}.

Khôlle 12. Sujet B.

Exercice 1.

Soit f une fonction définie par $f(x) = \left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{\frac{1}{2}}$.
Étudiez f et donnez l'allure de sa courbe représentative.

Démontrez que $f(x)f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)$.

Exercice 2.

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun. S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8. S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

On note p_n la probabilité qu'il prenne les transports en commun le n-ième jour.

On considère que $p_1 = 1$

1. Quelle est la probabilité qu'il prenne les transports en commun tous les jours ?
2. Exprimez p_n en fonction de n.

Exercice 3.

1. Justifiez que $\dfrac{(-1)^n}{n!} + \dfrac{4}{n^4} = o\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^2}\right)$.
2. Donnez un équivalent de $\sqrt{1 + \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{3^n}} - 1$.
3. Donnez un équivalent de $\dfrac{1}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} - \ln(n)$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

1. $\sqrt{n + \dfrac{1}{2}} - \sqrt{n}$.
2. $u_n = \dfrac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}$.

3. $u_n = \ln\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ où v_n est le terme général d'une série convergente.
4. $u_n = n^{1/n^2} - 1$.
5. $u_n = \dfrac{n^3 3^n}{n!}$

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Khôlle 13. Sujet B.

Exercice 1.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \begin{cases} e^{x^2-3x+2} & \text{si } x \in [0;3], \\ x - 1 - \frac{1}{\ln(x-2)} \end{cases}$.

Étudiez f et donnez l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 2.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi. On estime que :

— lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 ;

— lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

On note p_n la probabilité que la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service.

On considère que $p_0 = 1$

1. Quelle est la probabilité qu'une trottinette reste toujours en bon état ?
2. Exprimez p_n en fonction de n.

Exercice 3.

1. Justifiez que $\dfrac{\sin(n)}{n^2} + \dfrac{1}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^2}\right)$.
2. Donnez un équivalent de $\sin\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{3^n}\right)$.
3. Donnez un équivalent de $\ln(1+n) \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n^4} + \dfrac{1}{2^n}$.

2. $u_n = 3^n \sin\left(\frac{1}{n!}\right)$.
3. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$.
4. $u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2$.
5. $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$ où v_n est le terme général d'une série convergente.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrez que $A^3 - A^2 - 7A + 11I_3 = 0$ et déduisez-en, que A est inversible et donnez A^{-1}.

Khôlle 14. Sujet B.

Exercice 1.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$.
Étudiez f et donnez l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 2.

Dans un souci de préservation de l'environnement, Monsieur Durand décide de se rendre chaque matin au travail en utilisant son vélo ou les transports en commun. S'il choisit de prendre les transports en commun un matin, il reprend les transports en commun le lendemain avec une probabilité égale à 0,8. S'il utilise son vélo un matin, il reprend son vélo le lendemain avec une probabilité égale à 0,4.

On note p_n la probabilité qu'il prenne les transports en commun le n-ième jour.

On considère que $p_1 = 1$

1. Quelle est la probabilité qu'il prenne les transports en commun tous les jours ?
2. Exprimez p_n en fonction de n.

Exercice 3.

1. Justifiez que $\dfrac{\cos(n)}{3^n} + \dfrac{1}{n} = o\left(\dfrac{1}{(\ln(n))^5}\right)$.
2. Donnez un équivalent de $\exp\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{3^n}\right) - 1$.
3. Donnez un équivalent de $\dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{2\tan\left(\frac{3}{n^2}\right)}$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4} + \dfrac{\ln(n)}{2^n}$.
2. $u_n = 2^n \ln\left(1 + \dfrac{1}{4^n}\right)$.

3. $u_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$.
4. $u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^2$.
5. $u_n = v_n^2$ où v_n est le terme général d'une série convergente.

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminez A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

1.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 8 & 10 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculez AB puis BA.