Khôlles de la semaine du 06/03/2023.

Khôlle 1. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (X^2 + 2X - 3)(6X - 2)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{-3X+1}{X+4} + \frac{X+2}{2X-1}.$$

3. Déterminez les racines de $R(X) = 2X^2 + 2X - 4$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto 3x\mathrm{e}^{-x}$ une fonction.

1. Donnez le domaine de définition f (ou, ce qui revient au même, donnez les éventuelles valeurs interdites de f).

2. f est-elle paire ou impaire ?.

3. f est-elle périodique ?

4. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Calculez la dérivée de f puis précisez le domaine de dérivabilité.

6. Étudiez le signe de la fonction dérivée.

7. Donnez le tableau de variation de f.

8. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes ?

9. Déterminez la tangentes à $\mathscr{C}_f$ en 1.

10. Tracez $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3.

1. Donnez la limite de $\ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donnez la limite de $\dfrac{\ln(n)}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Donnez un équivalent de $n^7 - n^2 + 4$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Donnez un équivalent de $\dfrac{n^3 + 2n^2 + 4}{7n^4 + 12}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Justifiez que $\dfrac{1}{n^2} + \ln(n) = o(n)$.
6. Justifiez que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^2}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n}$.

c) $u_n = n^4$.

d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{4^n} + \sqrt{n}$.

Khôlle 2. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (2X^2 - X + 1)(X + 3)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{X+1}{X-1} + \frac{-X+1}{2X+2}.$$

3. Déterminez les racines de $R(X) = X^2 + 5X + 6$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto x\ln(x) + 1$ une fonction.

1. Donnez le domaine de définition f (ou, ce qui revient au même, donnez les éventuelles valeurs interdites de f).

2. f est-elle paire ou impaire ?.

3. f est-elle périodique ?

4. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Calculez la dérivée de f puis précisez le domaine de dérivabilité.

6. Étudiez le signe de la fonction dérivée.

7. Donnez le tableau de variation de f.

8. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes ?

9. Déterminez la tangentes à $\mathscr{C}_f$ en 1.

10. Tracez $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3.

1. Donnez la limite de e^{-n} lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez la limite de $\dfrac{2^n}{n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donnez un équivalent de $-2n^5 + 3n^4 + 4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Donnez un équivalent de $\dfrac{2n^8 - n^3}{5n^4 - 712}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Justifiez que $\mathrm{e}^{-n} + \dfrac{1}{n^4} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

6. Justifiez que $\dfrac{\sqrt{n}}{n} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^5}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

c) $u_n = n^{23}$.

d) $u_n = \dfrac{4^n}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n^2}$.

Khôlle 3. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (X^2 - 4X + 1)(-2X + 1)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{3X + 1}{X + 2} + \frac{X + 1}{-X + 2}.$$

3. Déterminez les racines de $R(X) = X^2 + 5X + 4$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$ une fonction.

1. Donnez le domaine de définition f (ou, ce qui revient au même, donnez les éventuelles valeurs interdites de f).

2. f est-elle paire ou impaire ?.

3. f est-elle périodique ?

4. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Calculez la dérivée de f puis précisez le domaine de dérivabilité.

6. Étudiez le signe de la fonction dérivée.

7. Donnez le tableau de variation de f.

8. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes ?

9. Déterminez la tangentes à $\mathscr{C}_f$ en 0.

10. Tracez $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3.

1. Donnez la limite de $\frac{1}{n^4}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez la limite de $\frac{(\ln(n))^{10}}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donnez un équivalent de $\frac{1}{3}n^3 - n^2 + 4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Donnez un équivalent de $\frac{7n^2 - n}{-2n^4 + 23}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Justifiez que $e^{-n} + \frac{1}{n^4} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

6. Justifiez que $n^3 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \sim n^3$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

b) $u_n = \frac{1}{n^2}$.

c) $u_n = n^4$.

d) $u_n = \frac{0{,}5^n}{n!}$.

e) $u_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n^2}$.

Khôlle 4. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (-X^2 + X + 1)(3X + 4)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{2X+3}{2X+1} + \frac{3X+1}{-2X+1}.$$

3. Déterminez les racines de $R(X) = X^2 + 3X - 4$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 - x - 6)$ une fonction.

1. Donnez le domaine de définition f (ou, ce qui revient au même, donnez les éventuelles valeurs interdites de f).

2. f est-elle paire ou impaire ?.

3. f est-elle périodique ?

4. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Calculez la dérivée de f puis précisez le domaine de dérivabilité.

6. Étudiez le signe de la fonction dérivée.

7. Donnez le tableau de variation de f.

8. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes ?

9. Déterminez la tangentes à $\mathscr{C}_f$ en 3.

10. Tracez $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3.

1. Donnez la limite de n^3 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez la limite de $\dfrac{e^n}{n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donnez un équivalent de $n^3 + n^2 - n + 1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Donnez un équivalent de $\dfrac{n^3 - 1}{2n^2 + 2n - 6}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Justifiez que $e^{-n} + \dfrac{1}{n^4} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

6. Justifiez que $\ln(n) + n^2 \sim n^2$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{3^n}$.

b) $u_n = n\sqrt{n}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n}$.

d) $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Khôlle 5. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (-2X^2 + 3X + 2)(X + 3)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{X+3}{2X+1} + \frac{X+1}{-X+4}.$$

3. Déterminez les racines de $R(X) = X^2 + 2X - 3$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^{-x}$ une fonction.

1. Donnez le domaine de définition f (ou, ce qui revient au même, donnez les éventuelles valeurs interdites de f).

2. f est-elle paire ou impaire ?.

3. f est-elle périodique ?

4. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Calculez la dérivée de f puis précisez le domaine de dérivabilité.

6. Étudiez le signe de la fonction dérivée.

7. Donnez le tableau de variation de f.

8. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes ?

9. Déterminez la tangentes à $\mathscr{C}_f$ en 0.

10. Tracez $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3.

1. Donnez la limite de $\dfrac{\cos(n)}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez la limite de $\dfrac{2^n}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donnez un équivalent de $n^4 + n^3 + 4n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Donnez un équivalent de $\dfrac{-2n^5 + n^3 + 2}{-3n^7 + 12}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Justifiez que $\dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = o\left(\ln(n)\right)$.

6. Justifiez que $n^2 + \mathrm{e}^{-n} \sim n^2$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = 3^n$.

b) $u_n = n^{-3}$.

c) $u_n = \dfrac{1}{n}$.

d) $u_n = \dfrac{n!}{3^n}$.

e) $u_n = \dfrac{2^n}{n!} + \dfrac{1}{n^2}$.

Khôlle 6. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (X^2 + 2X + 2)(-3X + 1)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{X + 2}{2X + 3} + \frac{-2X + 1}{3X + 1}.$$

3. Déterminez les racines de $R(X) = X^2 - 2X - 8$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$ une fonction.

1. Donnez le domaine de définition f (ou, ce qui revient au même, donnez les éventuelles valeurs interdites de f).

2. f est-elle paire ou impaire ?.

3. f est-elle périodique ?

4. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Calculez la dérivée de f puis précisez le domaine de dérivabilité.

6. Étudiez le signe de la fonction dérivée.

7. Donnez le tableau de variation de f.

8. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes ?

9. Déterminez la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0.

10. Tracez $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3.

1. Donnez la limite de $\dfrac{1}{n^3}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez la limite de $\dfrac{\ln(n)}{n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donnez un équivalent de $3n^2 + n + 4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Donnez un équivalent de $\dfrac{n^2 + 2n + 1}{n^2 - n^2 + 3n - 1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Justifiez que $\dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{n^4} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

6. Justifiez que $\dfrac{n}{\ln(n)} + n \sim n$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \mathrm{e}^n$.

b) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

c) $u_n = n^3$.

d) $u_n = \dfrac{1}{n}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{2^n} + n^2$.

Khôlle 7. Sujet A.

Exercice 1.

1. Développez, réduisez et ordonnez : $P(X) = (4X^2 + X + 1)(2X + 4)$.

2. Écrivez F comme une unique fraction rationnelle dont le numérateur est un polynôme sous forme développée, ordonnée et réduite (vous laisserez le numérateur sous forme factorisée) :

$$F(X) = \frac{X + 5}{2X + 5} + \frac{-3X + 1}{-2X + 2}.$$

3. Déterminez les racines de $R(X) = X^2 + X - 12$.

Exercice 2.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ une fonction.

1. Donnez le domaine de définition f (ou, ce qui revient au même, donnez les éventuelles valeurs interdites de f).

2. f est-elle paire ou impaire ?.

3. f est-elle périodique ?

4. Déterminez les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

5. Calculez la dérivée de f puis précisez le domaine de dérivabilité.

6. Étudiez le signe de la fonction dérivée.

7. Donnez le tableau de variation de f.

8. La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet-elle des asymptotes ?

9. Déterminez la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 1.

10. Tracez $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3.

1. Donnez la limite de n^7 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Donnez la limite de $\dfrac{\sqrt{n}}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

3. Donnez un équivalent de $n^2 + n + 4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Donnez un équivalent de $\dfrac{2n^3 - n}{5n^2 + 3n - 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. Justifiez que $\sqrt{n} + \ln(n) = o(n)$.

6. Justifiez que $n^3 + \ln(n) \sim n^3$.

Exercice 4.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^3}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$.

c) $u_n = 2^{-n}$.

d) $u_n = \dfrac{(-3)^n}{n!}$.

e) $u_n = 2^n + \dfrac{1}{n^5}$.

Khôlle 8. Sujet B.

Exercice 1.

Étudiez la fonction $x \mapsto x - 1 + \dfrac{8}{x^2+3}$ puis donnez-en une représentation graphique.

Exercice 2.

1. Donnez la limite de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donnez la limite de $\dfrac{e^{-n}\sqrt{n}}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Donnez un équivalent de $\dfrac{-3n^3 - n^2 + 1}{n^5 + 3n - 2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Justifiez que $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{\ln(n)2^n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
5. Justifiez que $\dfrac{\ln(n)}{n^2 2^n} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^4}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n^{-\frac{4}{3}}}$.

c) $u_n = 7^{-n}$.

d) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{5^n} + \dfrac{3^n}{n^5}$.

f) $u_n = \dfrac{(n!)^2 2^n}{(2n)!}$.

g) $u_n = \dfrac{e^{-n}}{3^n}$.

h) $u_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 1}{n^3 + n + 1}$.

i) $u_n = \dfrac{3n + \ln(n^2)}{n^3}$.

j) $u_n = \dfrac{4^n}{4n!}$.

k) $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

l) $u_n = n\sin(n)$.

Exercice 4.

Étudiez la convergence et calculez la somme de $\sum_{n\geqslant 0}\big(3+(-1)^n\big)^{-n}$.

Khôlle 9. Sujet B.

Exercice 1.

Étudiez la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-nx}}{e^x + 1}$ où $n \in \mathbb{N}$ puis donnez-en une représentation graphique.

Exercice 2.

1. Donnez la limite de $\dfrac{1}{\ln(n)}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donnez la limite de $\dfrac{(\ln(n))^4\sqrt{n}}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Donnez un équivalent de $\dfrac{8n^4 - 3n^2 + 1}{2n^5 + 4n + 5}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Justifiez que $\dfrac{n+1}{n^2\ln(n)} + \dfrac{1}{3^n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
5. Justifiez que $\dfrac{2^n}{5^n} + \dfrac{6}{n^5} \sim 6n^{-5}$.

Exercice 3.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$.

b) $u_n = n^6$.

c) $u_n = 0{,}95^{-n}$.

d) $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{n}$.

f) $u_n = \dfrac{n-2}{(n+1)!}$.

g) $u_n = \dfrac{1}{2^n\ln(n)}$.

h) $u_n = \dfrac{3n^2 + 3n + 1}{2n^2 + n + 4}$.

i) $u_n = \dfrac{3n + \ln(n^2)}{n^3}$.

j) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n!}$.

k) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.

l) $u_n = (-8)^n n^2$.

Exercice 4.

Étudiez la convergence et calculez la somme de $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n}\right)$.

Khôlle 10. Sujet B.

Exercice 1.

Étudiez la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$ puis donnez-en une représentation graphique.

Exercice 2.

1. Donnez la limite de $\dfrac{1}{n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donnez la limite de $\dfrac{n!}{n^{20}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Donnez un équivalent de $\dfrac{-7n^3+3n^2}{3n^3+6n^2+5}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Justifiez que $\dfrac{n^2}{\mathrm{e}^n} + \dfrac{1}{3^n} = o\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$.
5. Justifiez que $\dfrac{\ln(n)}{n^5} + \dfrac{1}{n^3+n^2+1} \sim \dfrac{1}{n^3}$.

Exercice 3.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^{-4}}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$.

c) $u_n = 10^{-n}$.

d) $u_n = \dfrac{4{,}5^n}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n^4}$.

f) $u_n = \dfrac{n!}{n^{2n}}$.

g) $u_n = \dfrac{\ln(n)+4}{n^{\frac{5}{2}}}$.

h) $u_n = \dfrac{n^2\ln(n)}{2n^2-3n+1}$.

i) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+\frac{1}{2}\ln(n)}{n^2}$.

j) $u_n = \dfrac{(2\pi)^n}{2n!}$.

k) $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$.

l) $u_n = (-1)^n\ln(n)$.

Exercice 4.

1. Montrez qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ unique, que l'on calculera, tel que :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \frac{x-1}{x^3+3x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}.$$

2. Montrez que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{n-1}{n^3+3n^2+2n}$ converge et calculez sa somme.

Khôlle 11. Sujet B.

Exercice 1.

Étudiez la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x\mathrm{e}^{-x}}$ puis donnez-en une représentation graphique.
On admettra que $1 - x\mathrm{e}^{-x} > 0$ *pour tout* x *réel.*

Exercice 2.

1. Donnez la limite de $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
2. Donnez la limite de $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Donnez un équivalent de $\dfrac{2n^2+n+1}{-n^3+n+1}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
4. Justifiez que $\dfrac{n^3}{n!} + \dfrac{\ln(n)}{3^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
5. Justifiez que $\dfrac{1}{n^2\ln(n)} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3.

Déterminez la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{1}{n^{12}}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n^{3,5}}$.

c) $u_n = 2^n$.

d) $u_n = \dfrac{(-6)^n}{n!}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{n^2}$.

f) $u_n =$.

g) $u_n = \dfrac{n+1}{n^{\frac{5}{2}}}$.

h) $u_n = \dfrac{n^2\ln(n)}{n^2-3n+1}$.

i) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+\frac{1}{2}\ln(n)}{n^2}$.

j) $u_n = \dfrac{e^n}{2n!}$.

k) $u_n = \sqrt{1+\dfrac{1}{n^3}} - 1$.

l) $u_n = (-4)^n$.

Exercice 4.

Étudiez la convergence de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{n+1}}{(\ln(n))^3 n^2}$.