Khôlles de la semaine du 24/09/2022.

Khôlle 1.

Exercice 1.

1. Donnez les tableaux de signes et de variations de la fonction ln.
2. Soit $f : x \mapsto \ln\left(x^2 - 2x + 2\right)$.
   Justifiez que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
3. Étudiez le signe de $g : x \mapsto 2x - 2$ sur son domaine de définition.
4. Déterminez la fonction dérivée de f.
5. Déterminez le tableau de signe de f' sur son domaine de définition.
6. Déterminez le tableau de variation f sur son domaine de définition.
   L'étude des limites aux bornes du domaine de définition ne sont pas demandées.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{2^n - n^{12}}{\ln(n)}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t_2 = 1 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 2\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right) \end{cases}$$

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente quelle serait sa limite.
2. Démontrez la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Démontrez que si $n > 5$ alors $u_n > n$.
4. Discutez de la convergence éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Khôlle 2.

Exercice 1.

1. Rappelez les tableaux de variation et de signe de la fonction ln ainsi que ceux de sa fonction dérivée.
2. Déterminez la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ sur $]0, +\infty[$.
3. Déterminez le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$.
   Aucune étude de limite n'est exigée.
4. Déterminez les zéros de $g : x \mapsto 2x^2 - 12x - 14$ sur son domaine de définition.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{2^n}{n^5} + \frac{n!}{2^n}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2t_1 - t_2 = 4 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t_1 - t_2 = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Exprimez pour tout entier naturel n, $u_{n+2}^2 - u_{n+1}^2$ en fonction de $u_{n+1} - u_n$.
3. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
4. Étudiez la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Khôlle 3.

Exercice 1.

1. Déterminez la fonction dérivée de $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x - x - 1$.
2. Étudiez le signe de $g : x \mapsto x\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.
3. Étudiez le signe de $h : x \mapsto \mathrm{e}^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Déduisez-en le signe de f' puis les variations de f.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{3^k}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t_1 = -4t_2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturez puis démontrez une formule explicite du terme général u_n.
3. Déterminez la limite de u_n.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Khôlle 4.

Exercice 1.

Soit $f : x \mapsto (x-1)\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminez f'.
2. Déterminez f''.
3. Étudiez les variations de f'.
4. Déduisez-en le signe de f'.
5. Déterminez les variations de f.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1+2\sin(n)}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t_1 + 2t_2 - t_3 = 0 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -t_1 + 3t_2 = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)u_{n+1} - nu_n = 0 \end{cases}$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturez puis démontrez une formule explicite du terme général u_n.
3. Déterminez la limite de u_n.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Khôlle 5.

Exercice 1.

1. Étudiez le signe de $g : x \mapsto 2x^2 - 8x + 102$.
2. Donnez les tableaux de signe et de variation de la fonction ln.
3. Donnez le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto x\ln(x) - x + 1$.
4. Déterminez f'.
5. Étudiez les variations de f.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n^2 - \ln(n)}{n}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; t_1 + 2t_2 - t_3 = -7 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculez u_2, u_3 et u_4.

2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

3. Démontrez :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (3n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

4. Déterminez, si elle existe la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que
$$a \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Khôlle 6.

Exercice 1.

1. Donnez les tableaux de variation et de signe des fonctions logarithme et exponentielle ainsi que de leurs dérivées.

2. Calculez la dérivée de $g : x \mapsto 1 - \left(x^2 - 2x + 1\right)\mathrm{e}^{-x}$.

3. Déterminez le tableau de variation de g.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{2^n \sqrt{n}}{n\mathrm{e}^n}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t_1 + 2t_2 = 0 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4t_1 - 3t_2 = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudiez la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Déterminez un minorant et un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

4. Déterminez la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Khôlle 7.

Exercice 1.

1. Étudiez le signe de $f : x \mapsto -x\mathrm{e}^{2x+1}$.
2. Déterminez f'.
3. Déterminez les variations de f.
4. Étudiez le signe de la fonction $g : x \mapsto 3x^2 - 6x - 9$ sur son domaine de définition.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{n^2 \sin(n^2 + n + 4)}{n^3 + 1}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 4\lambda + 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 + t_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; t_1 = 4t_2 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2 + 3u_n} \end{cases}$$

1. Montrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Démontrez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.
3. Étudiez la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Khôlle 8.

Exercice 1.

1. Déterminez le domaine de définition de $g : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
2. Montrez que g est paire.
3. Déterminez la dérivée de $f : x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ qui est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Étudiez les variations de f.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\left(1+\sqrt{u_n}\right)^2} \end{cases}$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturez puis démontrez une formule explicite du terme général u_n.
3. Déterminez la limite de u_n.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Khôlle 9.

Exercice 1.

Soit $g : x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$ une fonction définie sur $]0, +\infty[$.

1. Montrez que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.
2. Étudiez le signe de g' selon les valeurs de x.
3. Dressez le tableau de variation de g.

Exercice 2.

Déterminez la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{\lfloor n \rfloor}{n}.$$

Exercice 3.

1. Démontrez que $E = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrez que $F = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$

1. Calculez u_1, u_2, u_3, u_4.
2. Conjecturez puis démontrez une formule explicite du terme général u_n.
3. Déterminez la limite de u_n.

Exercice 5.

Trouvez, si possible un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$a \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rabiot 1.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n^2+2n} \end{cases}$$

1. Démontrez : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n}{(n+1)!}$.
2. Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

   Montrez que (s_n) converge et calculez sa limite.
   Indication : $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(p+1)!}$.

Rabiot 2.

1. Montrez qu'il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\},\ \frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

2. Pour tout entier non nul n on pose

$$s_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

Déterminez l'éventuelle limite de (s_n).