Khôlles de la semaine du 05/09/2022.

Khôlle 1.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto x^2$:
   (a) son nom,
   (b) son domaine de définition,
   (c) son domaine de dérivabilité,
   (d) son tableau de variation,
   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.
   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.
2. Donnez la formule permettant de calculer la somme des $k \in \mathbb{N}$ premiers termes d'une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2^n - 1.$$

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x}\mathrm{e}^x$.

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1.$$

Montrez que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$S_n = n^2.$$

Khôlle 2.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto x^3$:

   (a) son nom,

   (b) son domaine de définition,

   (c) son domaine de dérivabilité,

   (d) son tableau de variation,

   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.

   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.

2. Donnez la formule permettant de calculer la somme des $k \in \mathbb{N}$ premiers termes de la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $q \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$.

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 3 \times 2^n - 1.$$

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

1. Donnez le domaine de définition de f.

2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 0{,}1$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

1. Calculez u_1, u_2.
2. Montrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
3. Étudiez le signe de $u_{n+1} - u_n$. Que pouvez-vous en déduire pour (u_n) ?

Khôlle 3.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$:

   (a) son nom,

   (b) son domaine de définition,

   (c) son domaine de dérivabilité,

   (d) son tableau de variation,

   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.

   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.

2. Donnez la formule de récurrence et la formule explicite d'une suite arithmétique de terme initial u_p (avec $p \in \mathbb{N}$).

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3.$$

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{10}{2^n} - 6.$$

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto x^3 \times \cos(x)$.

1. Donnez le domaine de définition de f.

2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \times k!$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Écrivez S_1, S_2, S_3 sans le symbole Σ et les calculer.
2. Montrez par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = (n+1)! - 1$.

Khôlle 4.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$:

   (a) son nom,

   (b) son domaine de définition,

   (c) son domaine de dérivabilité,

   (d) son tableau de variation,

   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.

   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.

2. Donnez la formule de récurrence et la formule explicite d'une suite géométrique de terme initial u_p (avec $p \in \mathbb{N}$).

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = -2u_n - 3.$$

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 6 \times (-2)^n - 1.$$

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto x^7\sqrt{x}$.

1. Donnez le domaine de définition de f.

2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

On considère la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 7} \text{ et } u_0 = 1.$$

On se place dans un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$:

$$f(x) = \sqrt{x + 7}.$$

   (a) Résolvez l'équation $f(x) = x$. On appelle α sa solution positive.

   (b) Étudiez les variations de la fonction f sur $[0, +\infty[$ et donnez l'allure de la courbe représentative de f sur $[0; 5]$.

2. (a) Construisez les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. Vous laisserez apparents les traits de construction.

   (b) Que pouvez-vous conjecturer quant à la suite (u_n) ?

3. Démontrez que si (u_n) converge alors elle le fait vers α.

4. (a) Démontrez par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

   (b) On admet que $\alpha = \frac{1+\sqrt{29}}{3}$.
   Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

   (c) Concluez.

Khôlle 5.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto \cos(x)$:

   (a) son nom,

   (b) son domaine de définition,

   (c) son domaine de dérivabilité,

   (d) son tableau de variation,

   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.

   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.

2. Donnez la formule de récurrence et la formule explicite d'une suite arithmétique de terme initial u_p (avec $p \in \mathbb{N}$).

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + 3.$$

Démontrez par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 4.

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto 4x^6 - 7x^4 + 3x + 12$.

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

Un professeur oublie fréquemment les clés de sa salle de classe. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement « le professeur oublie ses clés le jour n ».

Soit p_n la probabilité que E_n se réalise.

On pose $p_1 = \dfrac{5}{13}$ où p_1 est la probabilité qu'il oublie ses clés le premier jour.

On suppose en outre que les deux conditions suivantes sont réalisées :

— s'il oublie ses clés le jour n, il les oubliera le jour suivant avec une probabilité de $\dfrac{1}{10}$;

— s'il n'oublie pas ses clés le jour n, il les oubliera le jour suivant avec une probabilité de $\dfrac{2}{5}$.

1. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_{n+1} = \frac{2}{5} - \frac{3}{10}p_n.$$

2. Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = \frac{1}{13}\left(4 + \left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}\right).$$

3. Étudiez la convergence de $(p_n)_{n\geq 1}$ et interprétez le résultat.

Khôlle 6.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto x^3$:

   (a) son nom,

   (b) son domaine de définition,

   (c) son domaine de dérivabilité,

   (d) son tableau de variation,

   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.

   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.

2. Donnez les méthodes que vous connaissez qui permettent d'étudier les variations d'une suite.

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Démontrez par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto (x^2 + 1)\mathrm{e}^x$.

1. Donnez le domaine de définition de f.

2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2} \end{array}\right. .$$

et

$$v_n = u_n - 3.$$

1. Montrez que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2.$$

2. Démontrez que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

3. (a) Démontrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right).$$

   (b) Déduisez-en le sens de variation des suites (v_n) puis (u_n).

Khôlle 7.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x + 3$:

   (a) son nom,

   (b) son domaine de définition,

   (c) son domaine de dérivabilité,

   (d) son tableau de variation,

   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.

   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.

2. Donnez les méthodes que vous connaissez qui permettent d'étudier les variations d'une suite.

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

Démontrez par récurrence que tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positifs.

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)(2x^2 - 3x)$.

1. Donnez le domaine de définition de f.

2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Démontrez que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_n = \frac{2n-1}{2^n}.$$

2. Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Khôlle 8.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$:
   (a) son nom,
   (b) son domaine de définition,
   (c) son domaine de dérivabilité,
   (d) son tableau de variation,
   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.
   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.
2. Donnez les définitions de suites majorée, minorée, bornée.

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n + 3.$$

Démontrez par récurrence que tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (n+1)^2.$$

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto (2x-7)\sin(x)$.

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

Montrez que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k^2-1)} = \frac{n^2+n-2}{4n(n+1)}.$$

Khôlle 9.

I Cours.

1. Donnez (sans justification) pour la fonction $x \mapsto \tan(x)$:

   (a) son nom,

   (b) son domaine de définition,

   (c) son domaine de dérivabilité,

   (d) son tableau de variation,

   (e) l'allure de sa courbe représentative et le nom de cette dernière.

   (f) Précisez son éventuelle parité, sa périodicité.

2. Donnez la définition d'une suite convergente.

II Exercice d'application 1.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 10u_n - 1.$$

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \frac{8}{9} \times 10^n + \frac{1}{9}.$$

III Exercice d'application 2.

Soit $f : x \mapsto \frac{(x^3-1)}{x}$.

1. Donnez le domaine de définition de f.
2. Calculez la dérivée de f en précisant son domaine de dérivabilité.

IV Exercice.

Montrez que pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

Rabiot.

I En rabiot 1.

1. Démontrez que pour tout réels a et b,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

2. Rappelez ce que signifie $\binom{n}{k}$ pour n et k des entiers naturels tels que $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. Démontrez par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

4. Développez $(a+b)^4$.

II En rabiot 2.

On considère la suite (H_n) définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

1. Démontrez que pour tout entier $i \geqslant 1$,

$$\frac{1}{i+1} \leqslant \int_i^{i+1} \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{i}.$$

2. Déduisez-en que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geqslant \ln(n+1).$$

3. Démontrez que la suite (H_n) diverge.