Devoir surveillé de BL du 11/05/2023.

I Analyse.

Soient $f : x \mapsto (2x+3)\,\mathrm{e}^{x^2}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On définit également les fonctions g et h sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad h(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

1. **Étude de la fonction f.**

   (a) Calculez l'image de 0 par f.

   (b) Sans justification : donnez le domaine de définition de f, dites si f est paire ou impaire ou périodique.

   (c) Expliquez brièvement pourquoi la fonction f est continue et ce que cela signifie pour sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

   (d) Déterminez les éventuelles limites de f en $+\infty$ puis $-\infty$ en expliquant.

   (e) Justifiez que f est dérivable, calculez sa dérivée f' puis montrez que

   $$f'(x) = (4x^2 + 6x + 2)\,\mathrm{e}^{x^2}.$$

   (f) Résolvez l'équation $4x^2 + 6x + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

   (g) Grâce à la question précédente recopiez puis complétez le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		$?$		$+\infty$
$4x^2 + 6x + 2$		?	0	?	?	?	

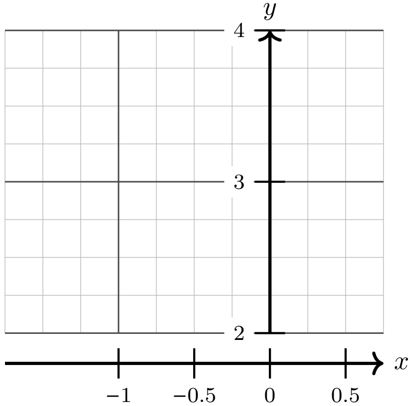
   Rappelons la formulette : le trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses éventuelles racines.

   (h) Déduisez des questions précédentes le tableau de signe de f' et de variation de f.

(i) Justifiez que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente, T, au point d'abscisse 0, puis donnez-en une équation.

(j) *On admet que* $\mathrm{e} \approx 2{,}7$ *et* $2\mathrm{e}^{1/4} \approx 2{,}5$.

Recopiez le repère ci-dessous puis dessinez la courbe représentative de f en faisant bien apparaître les informations obtenues aux questions précédentes. Vous penserez notamment à indiquer les tangentes horizontales.



2. **Étude de la fonction g.**

(a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g et étudier le sens de variation de g.

(b) Déterminez les éventuelles limites de g en 0 et en $+\infty$.

(c) Dressez le tableau de variation de la fonction g et déduisez-en le signe de g.

3. **Étude de la fonction h.**

(a) Calculez h' sur $]0,+\infty[$.

(b) Déterminez les éventuelles limites de h en 0 et $+\infty$.

Vous pouvez remarquer que $h(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

(c) Dressez le tableau de variation de h.

(d) h est-elle dérivable à droite en 0 ? La courbe représentative $\mathscr{C}_h$, de h, admet-t-elle une tangente en 0 ?

***

II Algèbre linéaire.

4. **Des questions techniques indépendantes les unes des autres.**

   (a) Effectuez le produit matriciel AB avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Effectuez le produit matriciel DC avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) Résolvez le système en l'échelonnant (donnez l'ensemble des solutions)

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & = & 8 \end{array} \right. .$$

   (d) Résolvez le système en l'échelonnant (donnez l'ensemble des solutions)

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array} \right. .$$

   (e) Vers quelle matrice la suite de matrices (A_n) converge-t-elle si, pour tout n entier naturel non nul

$$A_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{\ln(n)}{n} \\ \dfrac{n+1}{2n+2} & ne^{-n} \end{pmatrix}.$$

   Les réponses partielles seront valorisées.

Fin des questions techniques début du problème.

Dans la suite on considère les deux sous-ensembles F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

et

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *n'appartient pas* F_1 *car* $2 + 1 - 3 = 0$ *mais* $2 - 1 - 3 \neq 0$.
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *appartient à* F_2 *car* $2 + 0 - 2 \times 1 = 0$.

5. **Éléments de F_1 et F_2.**

   Parmi les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, lesquels appartiennent à F_1 ? et à F_2 ?

6. **Structure vectorielle F_2.**

   (a) Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs appartenant à F_2, et λ un nombre réel.
   Montrez que $\lambda x + y$ appartient à F_2.

   (b) À l'aide notamment de la question précédente, justifiez que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

7. **Structure vectorielle de F_1.**

   On note $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur.

   (a) Calculez le vecteur obtenu par le produit NX.
   Le résultat sera donné en fonction de x_1, x_2 et x_3.

   (b) Justifiez que F_1 est le noyau de l'application linéaire associée à la matrice N.

   (c) F_1 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez très brièvement.

8. **Description détaillée de F_1.**
Vous pourrez admettre sans justification que résoudre $NX = 0$ revient à résoudre le système

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

   (a) Résolvez le système S_3 en l'échelonnant. Vous préciserez l'ensemble des solutions sous forme d'un ensemble de vecteurs ou par une représentation paramétrique.

   (b) Déduisez-en que F_1 est une droite vectorielle dont vous préciserez un vecteur directeur.
   Rappel : n'importe quel vecteur non nul d'une droite vectoriel en est un vecteur directeur.

9. **Étude de F_1 et F_2.**
On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   (a) Si le vecteur X vérifie $PX = 0$, le vecteur X appartient-il à F_1 ? à F_2 ?

   (b) Résolvez le système

$$S_4 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

   (c) Déduisez-en $F_1 \cap F_2$.

***

III Probabilité.

10. **Des questions techniques indépendantes les unes des autres.**

    (a) Si $\mathbb{P}(A) = 0{,}5$ et $\mathbb{P}(B) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}2$ calculez

    i. $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$,

    ii. $\mathbb{P}(A|B)$,

    iii. $\mathbb{P}(A \cup B)$.

    (b) Avec un diagramme de Venn (diagramme patates) illustrez ce qu'est l'ensemble $A \cap \overline{B}$.

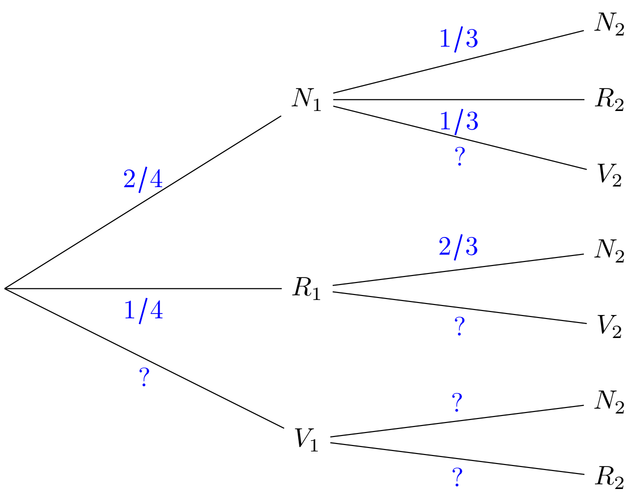
    (c) Étudiez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n}$.

Fin des questions techniques début du problème.

Dans la suite du problème on considère une urne contenant 2 boules noires, 1 boule verte et 1 boule rouge.

11. **Deux tirages sans remise.**
    Dans cette question on tire successivement deux boules de l'urne sans les remettre dans l'urne.

    (a) Recopiez et complétez sur votre copie l'arbre pondéré dessiné ci-dessous.



(b) Déterminez la probabilité d'obtenir deux boules vertes.

(c) Donnez la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage sachant qu'on a obtenu une boule rouge au premier tirage.

(d) On note C l'événement « obtenir 2 boules noires ».
Calculez $\mathbb{P}(C)$.

(e) Calculez la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage.

(f) On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors des deux tirages.

   i. Donnez $X(\Omega)$, le support de la variable aléatoire X.

   ii. Donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

12. **n tirages avec remise.**
On suppose maintenant qu'on tire successivement n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) boules de l'urne en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
Les tirages sont supposés indépendants les uns des autres et les probabilités d'obtenir une boule ne sont pas modifiées à chaque tirage.

On note V_i l'événement « obtenir une boule verte au i-ième tirage ».

(a) Interprétez par une phrase en français les événements :

   i. $V_1 \cap V_2 \cap \dots V_n$,

   ii. $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$.

(b) Démontrez que $\mathbb{P}\left(V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n\right) = \dfrac{1}{4^n}$.

(c) On note Y la variable aléatoire qui aux n tirages associe le rang de la première boule verte obtenue ou 0 si la boule verte n'est pas obtenue.

   i. Donnez le support (univers-image) de Y.

   ii. Calculez $\mathbb{P}(Y = 0)$.

   iii. Calculez, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k)$.

   iv. Vérifiez que les $(k,\mathbb{P}(Y = k))$, pour $k \in [\![0,n]\!]$, forment bien une loi (ou distribution) de probabilité de variable aléatoire.

***