Devoir surveillé de BL du 11/05/2023.

I Analyse.

1. (a) $f(0) = (2 \times 0 + 3)\mathrm{e}^{0^2} = 3$.

   (b) $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
   f n'est ni pair, ni impaire, ni périodique.

   (c) f est construite par composition et produit de fonctions continues donc est continue.
   La continuité de f signifie que sa courbe représentative est formée d'une seule ligne (d'un seul tenant).

   (d) $2x = 3 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 2x$ donc $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 2x\mathrm{e}^{x^2}$. Or par composition $\mathrm{e}^{x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par produit

   $$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

   (e) $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Ainsi f est un produit de fonctions dérivables donc

   $$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2\mathrm{e}^{x^2} + (2x+3) \times 2xex^2 \\ &= 2\mathrm{e}^{x^2} + (4x^2 + 6x)\mathrm{e}^{x^2} \end{aligned}$$

   En factorisant par e^{x^2} nous obtenons enfin

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (4x^2 + 6x + 2)\mathrm{e}^{x^2}.}$$

(f) $4x^2 + 6x + 2 = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$.
-1 est racine évidente donc la seconde racine est $-\frac{1}{2}$.

> L'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S}_1 = \{\left\{-1; -\frac{1}{2}\right\}$.

(g)

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2 + 6x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(h) Puisque $e^{x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $4x^2 + 6x + 2$.

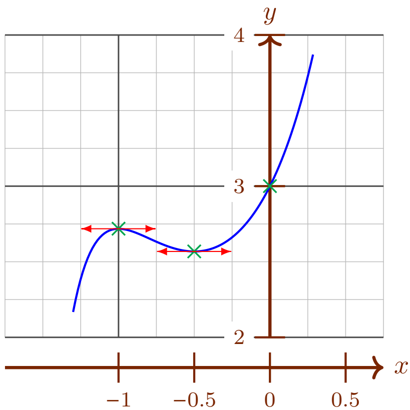
x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	2	↘	$2e^{\frac{1}{4}}$	↗	$+\infty$

(i) f est dérivable en 0 donc f admet une tangente en 0.
De plus une équation de cette tangente est

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

Or $f'(0) = 2$ et $f(0) = 3$ donc

> $T : \; y = 2x + 3.$



(j)

2. (a) * $\frac{x+1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$ donc, en composant, $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
$x+1>0$ sur $]0;+\infty[$ donc $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
Finalement, par somme, g est dérivable sur $]0;+\infty[$.

* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$g'(x) = \frac{\frac{1\times x-(x+1)\times 1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2}.}$$

* Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$g'(x) = -\frac{1\times(x+1)}{x(x+1)\times(x+1)} + \frac{1\times x}{(x+1)^2\times x}$$
$$= \frac{-1}{x(x+1)^2}$$

Ainsi $g' < 0$ donc

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante.}}$$

(b) * $\frac{x+1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc

$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

* $\frac{x+1}{x} \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty$.

Or $-\frac{1}{x+1} \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\sim} -1$ donc

$$\boxed{g(x) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(c)

x	0	$+\infty$
g	$\|\|$ $+\infty$ $\searrow$	0

Donc $g > 0$.

3. (a) h est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\frac{-1}{x(x+1)}$$

$$\boxed{h' = g.}$$

(b) * $\frac{1+y}{y} \underset{y\to0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$, donc par composition des limites et comparaison

$$\boxed{h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$$

* $h(x) = x\ln(1+x) - x\ln(x)$. Par croissance comparée : $x\ln(x) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\boxed{h(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0.}$$

(c)

x	0	$+\infty$
$h' = g$	$+$	
h	0	1

(d) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\tau_h(0,x) &= \frac{h(x)-h(0)}{x-0}\\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\end{aligned}$$

$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} +\infty.$

Donc

$\boxed{\text{$h$ n'est pas dérivable à droite en 0 mais $\mathscr{C}_h$ admet une demi-tangente verticale vers le haut en 0.}}$

***

II Algèbre linéaire.

4. (a) $AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) $DC = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) $L_2 \leftrightarrow L_1$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 5x_2 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right. .$$

   $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & 5x_2 & = & 8 \\ & - & 13x_2 & = & -13 \end{array}\right. .$$

   Puis par substitution :

   - $-13x_2 = -13 \iff x_2 = 1$.
   - $x_1 + 5 \times 1 = 8 \iff x_1 = 3$

   L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{(3; 1)\}$.

   (d) $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ & & 3x_2 & & & = & -6 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array}\right. .$$

   $L_3 \leftarrow -3L_3 + L_2$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ & & 3x_2 & & & = & -6 \\ & & & & 9x_3 & = & -9 \end{array}\right. .$$

   Puis par substitution

   - $x_3 = -1$.
   - $x_2 = -2$.
   - $x_1 = 3$.

   L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{(3; -2; -1)\}$.

(e) $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par croissances comparées $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$\frac{n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\frac{n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Par croissances comparées : $ne^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.}$$

5. $u_1 \notin F_1$, $u_2 \notin F_1$, $u_3 \in F_1$.
   $u_1 \notin F_2$, $u_2 \in F_2$, $u_3 \notin F_2$.

6. (a) $\lambda x + y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}$.

   Or

$$\begin{aligned} &(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - 2(\lambda x_3 + y_3) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 - 2x_3) + (y_1 + y_2 - 2y_3) \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   donc

$$\boxed{\lambda x + y \in F_2.}$$

   (b) (i) D'après la question précédente F_2 est stable par combinaisons linéaires.
   (ii) $\vec{0} \in F_2$: $0 + 0 - 2 \times 0 = 0$.
   (iii) $F_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$$\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

7. (a)
$$\boxed{NX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}}$$

(b) Le noyau de l'application linéaire associée à N est formé des vecteurs X tels que $NX = 0$.

Autrement dit : $X \in \ker(N) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Autrement dit : $X \in \ker(N)$ si et seulement si $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ et $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Donc :

$$\boxed{X \in \ker(N) \Leftrightarrow X \in F_1.}$$

(c) Puisque F_1 est le noyau d'une application linéaire

$$\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$$

8. (a) $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Puis par substitution

- $x_2 = 0$.
- $x_1 = x_3$.

Donc les vecteurs de F_1 sont de la forme $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Autrement dit une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}$$

(b) F_1 est l'ensemble des vecteurs de la forme $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ autrement dit F_1 est la droite vectorielle dont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

9. (a) Avec les deux premières lignes de la matrice nous retrouvons la question 8 et donc $X \in F_1$.
   Avec la dernière ligne de la matrice on voit que $X \in F_2$.

   (b) $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & = & 0 \\ & & & & 3x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Par substitution

   - $x_3 = 0$.
   - $x_2 = 0$.
   - $x_1 = 0$

   (c) $$\boxed{F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}.}$$

***

III Probabilité.

10. (a) i.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) &= 1-\mathbb{P}(B)\\ &= 1-0{,}3\\ &= 0{,}7\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(B\cap A)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{0{,}2}{0{,}5}\\ &= 0{,}4\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B) &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\\ &= 0{,}5+0{,}3-0{,}2\\ &= 0{,}6\end{aligned}$$

(b)

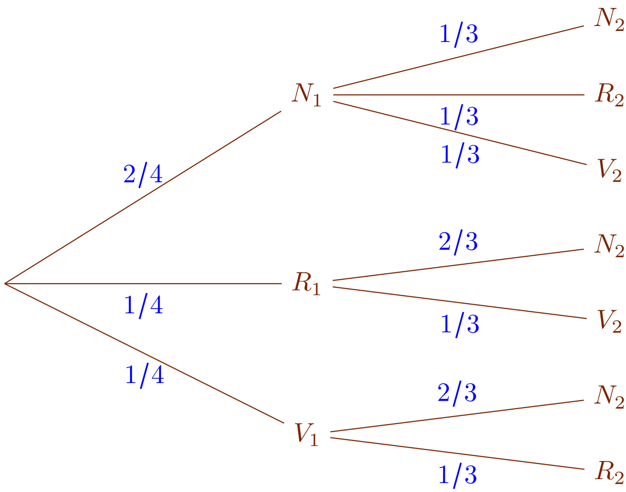
(c) $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

D'où $\frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$.

La série $\sum \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1;1[$ donc est convergente.

Par conséquent

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n} \text{ est convergente.}}$$



11. (a)

(b) Il n'y a pas de chemin avec deux V. C'est un événement impossible.

La probabilité d'obtenir deux boules vertes est nulle.

(c) Calculons $\mathbb{P}(N_2|R_1)$.

Par lecture sur l'arbre

$$\mathbb{P}(N_2|R_1) = \frac{2}{3}.$$

(d) Calculons $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.

Formule ds probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) &= \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}(N_2|N_1)\\ &= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

(e) Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap N_2) + \mathbb{P}V_1 \cap N_2)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(f) i. $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

ii.

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

12. (a) i. Les n boules tirées sont vertes.

ii. Au moins une des boules tirées est verte.

(b) Formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) &= \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2|v_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n|V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{4} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n\end{aligned}$$

(c) i. $Y(\Omega) = [\![0;n]\!]$.

ii. Formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(Y = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

iii. $\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$.

iv. Les $\mathbb{P}(Y = k)$ sont bien positifs et

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y = 0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} - \frac{1}{3} \\ &= 1\end{aligned}$$

***