Devoir surveillé de BL du 11/05/2023.

I Analyse.

Soient $f : x \mapsto (2x+3)\,\mathrm{e}^{x^2}$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

On définit également les fonctions g et h sur $]0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad h(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

1. **Étude de la fonction f.**

(a) Calculez l'image de 0 par f.

$f(0) = (2\times 0+3)\mathrm{e}^{0^2} = 3.$

(b) Sans justification : donnez le domaine de définition de f, dites si f est paire ou impaire ou périodique.

$\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
f n'est ni pair, ni impaire, ni périodique.

(c) Expliquez brièvement pourquoi la fonction f est continue et ce que cela signifie pour sa représentation graphique $\mathscr{C}_f$.

f est construite par composition et produit de fonctions continues donc est continue.
La continuité de f signifie que sa courbe représentative est formée d'une seule ligne (d'un seul tenant).

(d) Déterminez les éventuelles limites de f en $+\infty$ puis $-\infty$ en expliquant.

$2x = 3 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 2x$ donc $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} 2x\mathrm{e}^{x^2}$. Or par composition $\mathrm{e}^{x^2} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par produit

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty.}$$

(e) Justifiez que f est dérivable, calculez sa dérivée f' puis montrez que

$$f'(x) = (4x^2+6x+2)\,\mathrm{e}^{x^2}.$$

$x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ est une composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Ainsi f est un produit de fonctions dérivables donc

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\mathrm{e}^{x^2} + (2x+3) \times 2x\mathrm{e}x^2 \\ &= 2\mathrm{e}^{x^2} + (4x^2+6x)\mathrm{e}^{x^2} \end{aligned}$$

En factorisant par e^{x^2} nous obtenons enfin

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (4x^2+6x+2)\mathrm{e}^{x^2}.}$$

(f) Résolvez l'équation $4x^2 + 6x + 2 = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$4x^2 + 6x + 2 = 0 \iff 2x^2 + 3x + 1 = 0$.
-1 est racine évidente donc la seconde racine est $-\frac{1}{2}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S}_1 = \{\left\{-1; -\tfrac{1}{2}\right\}.}$$

(g) Grâce à la question précédente recopiez puis complétez le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		?		$+\infty$
$4x^2+6x+2$		?	0	?	?	?	

Rappelons la formulette : le trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses éventuelles racines.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2+6x+2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(h) Déduisez des questions précédentes le tableau de signe de f' et de variation de f.

Puisque $\mathrm{e}^{x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $4x^2 + 6x + 2$.

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$	$\nearrow$	$+\infty$

(i) Justifiez que $\mathscr{C}_f$ admet une tangente, T, au point d'abscisse 0, puis donnez-en une équation.

f est dérivable en 0 donc f admet une tangente en 0.
De plus une équation de cette tangente est

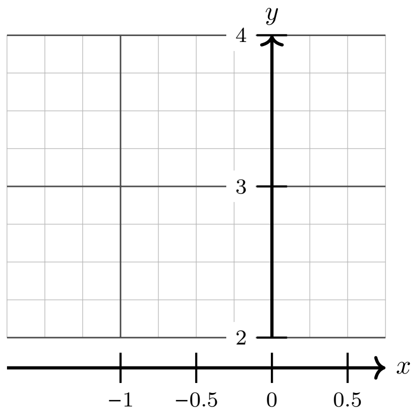
$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0).$$

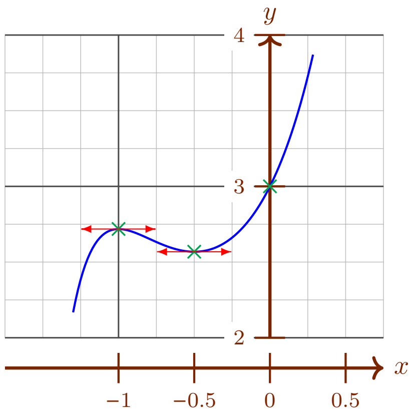
Or $f'(0) = 2$ et $f(0) = 3$ donc

$$\boxed{T : \ y = 2x + 3.}$$

(j) *On admet que* $\mathrm{e} \approx 2{,}7$ *et* $2\mathrm{e}^{1/4} \approx 2{,}5$.

Recopiez le repère ci-dessous puis dessinez la courbe représentative de f en faisant bien apparaître les informations obtenues aux questions précédentes. Vous penserez notamment à indiquer les tangentes horizontales.





2. **Étude de la fonction g.**

   (a) Déterminer la fonction dérivée de la fonction g et étudier le sens de variation de g.

   * $\frac{x+1}{x} > 0$ sur $]0;+\infty[$ donc, en composant, $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{x}\right)$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
     $x+1>0$ sur $]0;+\infty[$ donc $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.
     Finalement, par somme, g est dérivable sur $]0;+\infty[$.
   * Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1\times x-(x+1)\times 1}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} - \frac{-1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{-1}{x^2} \times \frac{x}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(1+x)^2}.}$$

   * Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1\times(x+1)}{x(x+1)\times(x+1)} + \frac{1\times x}{(x+1)^2\times x} \\ &= \frac{-1}{x(x+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi $g' < 0$ donc

$$\boxed{g \text{ est strictement décroissante.}}$$

(b) Déterminez les éventuelles limites de g en 0 et en $+\infty$.

$*$ $\frac{x+1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ donc

$$\boxed{g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

$*$ $\frac{x+1}{x} \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par composition, $\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty$.
Or $-\frac{1}{x+1} \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\sim} -1$ donc

$$\boxed{g(x) \underset{\substack{x\to0\\x>0}}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(c) Dressez le tableau de variation de la fonction g et déduisez-en le signe de g.

x	0		$+\infty$
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Donc $g > 0$.

3. **Étude de la fonction h.**

(a) Calculez h' sur $]0, +\infty[$.

h est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$h'(x) = 1 \times \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x\frac{-1}{x(x+1)}$$

$$h' = g.$$

(b) Déterminez les éventuelles limites de h en 0 et $+\infty$.

Vous pouvez remarquer que $h(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

* $\frac{1+y}{y} \underset{y\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ et $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc par composition des limites et comparaison

$$h(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

* $h(x) = x\ln(1+x) - x\ln(x)$. Par croissance comparée : $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ donc

$$h(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

(c) Dressez le tableau de variation de h.

x	0	$+\infty$
$h' = g$	$+$	
h	$0 \nearrow$	1

(d) h est-elle dérivable à droite en 0 ? La courbe représentative $\mathscr{C}_h$, de h, admet-t-elle une tangente en 0 ?

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\tau_h(0,x) &= \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}\\ &= \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\end{aligned}$$

$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\longrightarrow} +\infty$.

Donc

h n'est pas dérivable à droite en 0 mais $\mathscr{C}_h$ admet une demi-tangente verticale vers le haut en 0.

***

II Algèbre linéaire.

4. **Des questions techniques indépendantes les unes des autres.**

   (a) Effectuez le produit matriciel AB avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$AB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

   (b) Effectuez le produit matriciel DC avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$DC = \begin{pmatrix} 3 & 3 \end{pmatrix}$.

   (c) Résolvez le système en l'échelonnant (donnez l'ensemble des solutions)

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 3 \\ x_1 & + & 5x_2 & = & 8 \end{array} \right. .$$

$L_2 \leftrightarrow L_1$

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & 5x_2 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & = & 3 \end{array} \right. .$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & + & 5x_2 & = & 8 \\ & - & 13x_2 & = & -13 \end{array} \right. .$$

Puis par substitution :

- $-13x_2 = -13 \iff x_2 = 1$.
- $x_1 + 5 \times 1 = 8 \iff x_1 = 3$

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S} = \{(3;1)\}.}$$

(d) Résolvez le système en l'échelonnant (donnez l'ensemble des solutions)

$$S_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array} \right. .$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ & & 3x_2 & & & = & -6 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & 1 \end{array} \right. .$$

$L_3 \leftarrow -3L_3 + L_2$.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} -x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -3 \\ & & 3x_2 & & & = & -6 \\ & & & & 9x_3 & = & -9 \end{array} \right. .$$

Puis par substitution

- $x_3 = -1$.
- $x_2 = -2$.
- $x_1 = 3$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S} = \{(3; -2; -1)\}.}$$

(e) Vers quelle matrice la suite de matrices (A_n) converge-t-elle si, pour tout n entier naturel non nul

$$A_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{n+1} & \dfrac{\ln(n)}{n} \\ \dfrac{n+1}{2n+2} & ne^{-n} \end{pmatrix}.$$

Les réponses partielles seront valorisées.

$\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Par croissances comparées $\frac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

$\frac{n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$ donc $\frac{n+1}{2n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$

Par croissances comparées : $ne^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Fin des questions techniques début du problème.

Dans la suite on considère les deux sous-ensembles F_1 et F_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

et

$$F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\}$$

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *n'appartient pas* F_1 *car* $2 + 1 - 3 = 0$ *mais* $2 - 1 - 3 \neq 0$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *appartient à* F_2 *car* $2 + 0 - 2 \times 1 = 0$.

5. **Éléments de F_1 et F_2.**

   Parmi les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, lesquels appartiennent à F_1 ? et à F_2 ?

   $u_1 \notin F_1$, $u_2 \notin F_1$, $u_3 \in F_1$.
   $u_1 \notin F_2$, $u_2 \in F_2$, $u_3 \notin F_2$.

6. **Structure vectorielle F_2.**

   (a) Soient $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ des vecteurs appartenant à F_2, et λ un nombre réel.
   Montrez que $\lambda x + y$ appartient à F_2.

   $$\lambda x + y = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned}&(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) - 2(\lambda x_3 + y_3)\\&= \lambda(x_1 + x_2 - 2x_3) + (y_1 + y_2 - 2y_3)\\&= \lambda \times 0 + 0\\&= 0\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\lambda x + y \in F_2.}$$

(b) À l'aide notamment de la question précédente, justifiez que F_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(i) D'après la question précédente F_2 est stable par combinaisons linéaires.

(ii) $\vec{0} \in F_2 : 0 + 0 - 2 \times 0 = 0.$

(iii) $F_2 \subset \mathbb{R}^3.$

$$\boxed{F_2 \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

7. **Structure vectorielle de F_1.**

On note $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ une matrice et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un vecteur.

(a) Calculez le vecteur obtenu par le produit NX.
Le résultat sera donné en fonction de x_1, x_2 et x_3.

$$\boxed{NX = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}}$$

(b) Justifiez que F_1 est le noyau de l'application linéaire associée à la matrice N.

Le noyau de l'application linéaire associée à N est formé des vecteurs X tels que $NX = 0$.

Autrement dit : $X \in \ker(N) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$.
Autrement dit : $X \in \ker(N)$ si et seulement si $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ et $x_1 - x_2 - x_3 = 0$.
Donc :

$$\boxed{X \in \ker(N) \Leftrightarrow X \in F_1.}$$

(c) F_1 est-il un sous-espace vectoriel ? Justifiez très brièvement.

Puisque F_1 est le noyau d'une application linéaire

$$\boxed{F_1 \text{ est un sous-espace vectoriel.}}$$

8. **Description détaillée de F_1.**
Vous pourrez admettre sans justification que résoudre $NX = 0$ revient à résoudre le système

$$S_3 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) Résolvez le système S_3 en l'échelonnant. Vous préciserez l'ensemble des solutions sous forme d'un ensemble de vecteurs ou par une représentation paramétrique.

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & = & 0 \end{array} \right.$$

Puis par substitution

- $x_2 = 0$.
- $x_1 = x_3$.

Donc les vecteurs de F_1 sont de la forme $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Autrement dit une représentation paramétrique est :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{array} \right.$$

(b) Déduisez-en que F_1 est une droite vectorielle dont vous préciserez un vecteur directeur.
Rappel : n'importe quel vecteur non nul d'une droite vectoriel en est un vecteur directeur.

F_1 est l'ensemble des vecteurs de la forme $t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ autrement dit F_1 est la droite vectorielle dont $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.

9. **Étude de F_1 et F_2.**
On note $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

(a) Si le vecteur X vérifie $PX = 0$, le vecteur X appartient-il à F_1 ? à F_2 ?

Avec les deux premières lignes de la matrice nous retrouvons la question 8 et donc $X \in F_1$.
Avec la dernière ligne de la matrice on voit que $X \in F_2$.

(b) Résolvez le système

$$S_4 : \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0\\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 0\\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0\end{array}\right.$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et $L_3 \leftarrow L_1 - L_3$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 0\\ & & 2x_2 & & & = & 0\\ & & & & 3x_3 & = & 0\end{array}\right.$$

Par substitution

- $x_3 = 0$.
- $x_2 = 0$.
- $x_1 = 0$

(c) Déduisez-en $F_1 \cap F_2$.

$$\boxed{F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}\}.}$$

***

III Probabilité.

10. **Des questions techniques indépendantes les unes des autres.**

(a) Si $\mathbb{P}(A) = 0{,}5$ et $\mathbb{P}(B) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}2$ calculez

i. $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{B}\right) &= 1 - \mathbb{P}(B)\\ &= 1 - 0{,}3\\ &= 0{,}7\end{aligned}$$

ii. $\mathbb{P}(A|B)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}\\ &= \frac{0{,}2}{0{,}5}\\ &= 0{,}4\end{aligned}$$

iii. $\mathbb{P}(A \cup B)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= 0{,}5 + 0{,}3 - 0{,}2\\ &= 0{,}6\end{aligned}$$

(b) Avec un diagramme de Venn (diagramme patates) illustrez ce qu'est l'ensemble $A \cap \overline{B}$.

(c) Étudiez la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n}$.

$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

D'où $\frac{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{3^n}$.

La série $\sum \frac{1}{3^n}$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1;1[$ donc est convergente.

Par conséquent

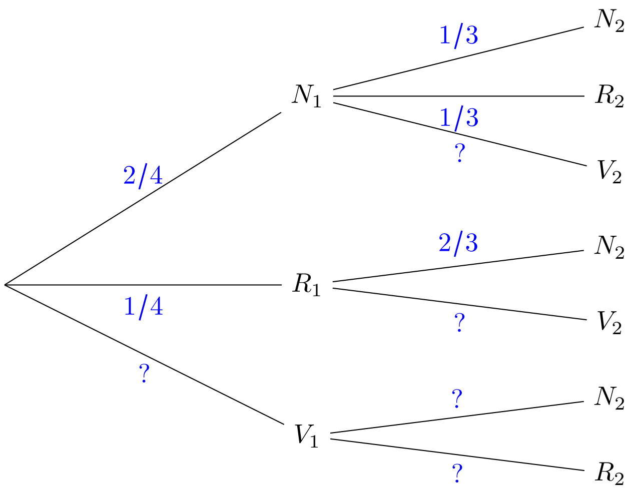
$$\boxed{\sum_{n\geqslant 0} \frac{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n} \text{ est convergente.}}$$

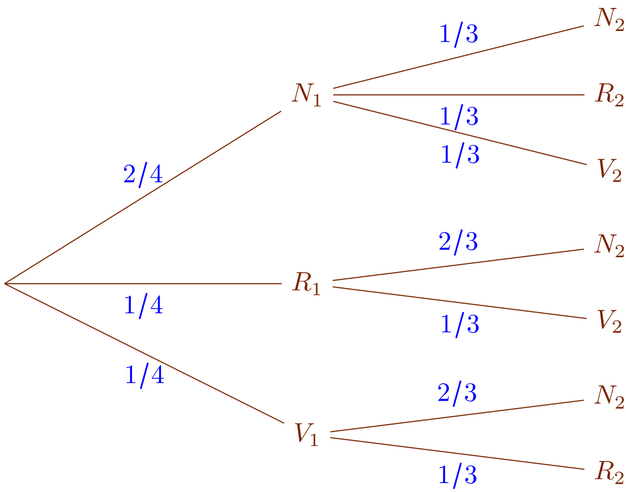
Fin des questions techniques début du problème.

Dans la suite du problème on considère une urne contenant 2 boules noires, 1 boule verte et 1 boule rouge.

11. **Deux tirages sans remise.**
    Dans cette question on tire successivement deux boules de l'urne sans les remettre dans l'urne.

    (a) Recopiez et complétez sur votre copie l'arbre pondéré dessiné ci-dessous.





(b) Déterminez la probabilité d'obtenir deux boules vertes.

Il n'y a pas de chemin avec deux V. C'est un événement impossible.

La probabilité d'obtenir deux boules vertes est nulle.

(c) Donnez la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage sachant qu'on a obtenu une boule rouge au premier tirage.

Calculons $\mathbb{P}(N_2|R_1)$.

Par lecture sur l'arbre

$$\mathbb{P}(N_2|R_1) = \frac{2}{3}.$$

(d) On note C l'événement « obtenir 2 boules noires ».
Calculez $\mathbb{P}(C)$.

Calculons $\mathbb{P}(N_1 \cap N_2)$.

Formule ds probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_1 \cap N_2) &= \mathbb{P}(N_1) \times \mathbb{P}(N_2|N_1)\\ &= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

(e) Calculez la probabilité d'obtenir une boule noire au second tirage.

Formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_2) &= \mathbb{P}(N_1 \cap N_2) + \mathbb{P}(R_1 \cap N_2) + \mathbb{P}V_1 \cap N_2) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(f) On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules noires obtenues lors des deux tirages.

i. Donnez $X(\Omega)$, le support de la variable aléatoire X.

$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

ii. Donnez la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

x_i	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

12. **n tirages avec remise.**
On suppose maintenant qu'on tire successivement n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) boules de l'urne en remettant à chaque fois la boule dans l'urne.
Les tirages sont supposés indépendants les uns des autres et les probabilités d'obtenir une boule ne sont pas modifiées à chaque tirage.

On note V_i l'événement « obtenir une boule verte au i-ième tirage ».

(a) Interprétez par une phrase en français les événements :

i. $V_1 \cap V_2 \cap \dots V_n$,

Les n boules tirées sont vertes.

ii. $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n$.

Au moins une des boules tirées est verte.

(b) Démontrez que $\mathbb{P}\left(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n\right) = \dfrac{1}{4^n}$.

Formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) &= \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2|v_1) \times \cdots \times \mathbb{P}(V_n|V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{4} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

(c) On note Y la variable aléatoire qui aux n tirages associe le rang de la première boule verte obtenue ou 0 si la boule verte n'est pas obtenue.

i. Donnez le support (univers-image) de Y.

$Y(\Omega) = [\![0; n]\!]$.

ii. Calculez $\mathbb{P}(Y = 0)$.

Formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(Y = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

iii. Calculez, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = k)$.

$\mathbb{P}(Y = k) = \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \times \frac{1}{4}$.

iv. Vérifiez que les $(k,\mathbb{P}(Y = k))$, pour $k \in [\![0,n]\!]$, forment bien une loi (ou distribution) de probabilité de variable aléatoire.

Les $\mathbb{P}(Y = k)$ sont bien positifs et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y = 0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y = k) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^{k} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{3} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} - \frac{1}{3} \\
&= 1
\end{aligned}$$

***