Devoir surveillé CPGE B/L. 2023/02/16.

Les exercices qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

Exercice 1. 2 points

Calculez les nombres suivants.

a) $A = 2 + 3 \times 4$.

b) $B = 7 \times 8 - 1$.

c) $C = (3 + 5) \times 2$.

d) $D = -7 + 12$.

e) $E = 2 \times 3^2$.

f) $F = \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}$.

g) $G = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7}$.

h) $H = 4 + \dfrac{3}{7}$.

i) $I = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{4}{7}$.

j) $J = \dfrac{2 \times 37}{3 \times 15} \times \dfrac{4 \times 15}{7 \times 37}$.

k) $K = (3 + 2)^2$.

l) $L = 3 \times (7 - 1)^2$.

*****

Exercice 2. 2 points

1. Donnez le résultat sous forme d'une seule expression fractionnaire.

a) $A(x) = \dfrac{2x}{3} + 4\dfrac{x}{5}$.

b) $B(x) = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{x}{7}$.

c) $C(x) = \dfrac{2x}{5} \times \dfrac{3x}{2}$.

d) $D(x) = \dfrac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}}$.

e) $E(x) = \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{3}{x+2}$.

f) $F(x) = \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{2}{x^2}$.

2. Développez les expressions suivantes.

   a) $M(x) = 7(2-5x)$.
   b) $N(x) = 3(3x-4)$.
   c) $P(x) = (2x+7)(3x-6)$.
   d) $Q(x) = (3+4x)^2$.
   e) $R(x) = -5(x-3)(x+1)$.
   f) $S(x) = (2x+1)(3x+1)^2$.

*****

Exercice 3. 2 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $E_1 : \ 3x+2=4$.

b) $E_2 : \ -7x+3=3x+1$.

c) $E_3 : \ (x-1)(x+2)=0$.

d) $E_4 : \ \dfrac{2x+1}{234}=0$.

e) $E_5 : \ x^2=4x$.

f) $E_6 : \ x^2-x+6=0$.

*****

Exercice 4. 3 points

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — R : « Le 1$^{\text{er}}$ jeton tiré est rose » ;
   — J : « Le 2$^{\text{e}}$ jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement : N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

*****

Exercice 5. 3 points

Soit $f : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminez f'.
2. Étudiez le signe de f'.
3. Déterminez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de f.

*****

Exercice 6. 4 points

On considère deux urnes U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.

Étape n $(n \geqslant 2)$:

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans U_1, on note sa couleur et on la remet dans U_1.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans U_2, on note sa couleur et on la remet dans U_2.

On note A l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne U_1 à l'étape n » et p_n sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2.
2. Montrer que pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$.
3. Calculer p_3.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier n entier naturel non nul, $p_n > 0{,}25$.

   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.

(c) En déduire que la suite (p_n) est convergente vers un réel noté ℓ.

(d) Justifier que ℓ vérifie l'équation : $\ell = 0{,}8\ell + 0{,}05$. En déduire la valeur de ℓ.

*****

Exercice 7. 5 points

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\vec{k}\right)$ du plan.

4. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   (b) Déduire de ce qui précède le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

5. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

*****

Exercice 8. 5 points

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Établir que pour tout entier naturel n,$u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

   (a) Établir que pour tout entier naturel n,$v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

   (b) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
   En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

   (c) On admet que pour tout entier naturel n,$u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
   Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

*****

Exercice 9. 5 points

On considère l'ensemble $F = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, 4x - 2y = 0 \right\}$. Ainsi F est formé des vecteurs dont les coordonnées x et y vérifient $4x - 2y = 0$.

1. Montrer que $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ appartient à F.

2. Donner un autre vecteur $\vec{w}$ non nul de F.

3. Montrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

4. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de F.

5. Montrer que $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à F.

6. Justifier que F est une droite vectorielle.

7. Donner une représentation paramétrique de F.

*****

Exercice 10. 4 points

Soient $n,a,b \in \mathbb{N}^3$. On effectue, dans une urne contenant initialement b boules blanches et b boules noires, une suite de tirages de la façon suivante : si les $k-1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche, on procède au $k^{\text{ème}}$ tirage, et alors :

- si la boule obtenue est noire, ce $k^{\text{ème}}$ tirage est le tirage final.
- si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus a autres boules blanches avant de procéder au tirage suivant.

On note A_n l'événement « une boule blanche apparaît à chacun des n tirages ». Montrer que

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+b}{ka+2b}.$$

Rappel : $\prod$ signifie un produit. Par exemple $\prod_{k=0}^{n-1} k+1 = (0+1)\times(1+1)\times(2+1)\times\cdots\times(n-1)\times n$.

*****

Exercice 11. 4 points

Trouver un équivalent simple à la suite (u_n) dans les cas suivants et donner si possible sa limite.

a) $u_n = (n+3\ln(n))\mathrm{e}^{-(n+1)}$.

b) $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$.

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$.

d) $u_n = \dfrac{n!+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$.

*****

Exercice 12. 3 points

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $x^5 + nx - 1 = 0$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

*****