Devoir surveillé CPGE B/L. 2023/02/16.

Exercice 1. 2 points

a) $A = 14$. b) $B = 55$. c) $C = 16$. d) $D = 5$.

e) $E = 18$. f) $F = \frac{7}{3}$. g) $G = \frac{41}{35}$. h) $H = \frac{31}{7}$.

i) $I = \frac{12}{42}$. j) $J = \frac{8}{21}$. k) $K = 25$. l) $L = 108$.

*****

Exercice 2. 2 points

1. a) $A(x) = \frac{22x}{15}$. b) $B(x) = \frac{17x}{21}$. c) $C(x) = \frac{3x^2}{5}$.

   d) $D(x) = \frac{5}{2}$. e) $E(x) = \frac{(x+1)(x+2)+6}{2(x+2)}$. f) $F(x) = \frac{x^5+8}{4x^2}$.

2. a) $M(x) = -35x + 14$. b) $N(x) = 9x - 12$.

   c) $P(x) = 6x^2 + 9x - 42$. d) $Q(x) = 16x^2 + 24x + 9$.

   e) $R(x) = -5x^2 + 10x + 15$ f) $S(x) = 18x^3 + 21x^2 + 8x + 1$.

*****

Exercice 3. 2 points

a) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. b) $\left\{\frac{2}{10}\right\}$. c) $\{1; -2\}$.

d) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. e) $\{0; 4\}$. f) $\varnothing$.

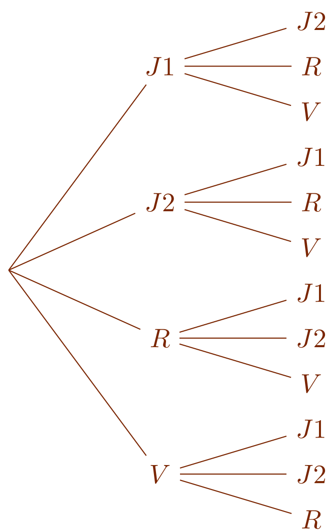
*****

Exercice 4. 3 points

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — R : « Le 1$^{\text{er}}$ jeton tiré est rose » ;
   — J : « Le 2$^{\text{e}}$ jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement : N :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

1. La modélisation la plus simple (car utilisant l'équiprobabilité) nécessite de distinguer les deux jetons jaunes : $J1$ et $J2$.



2. D'après l'arbre précédent : $|\Omega| = 12$.

Il y a 12 tirages possibles.

3. (a) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R})$.

$\tilde{R} = \{RJ1, RJ2, RV\}$.
Il y a équiprobabilité, $\tilde{R}$ est réalisé par 3 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{3}{12}$.

$\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{1}{4}$.

Calculons $\mathbb{P}(\tilde{J})$.

$\tilde{J} = \{J1J2, J2J1, RJ1, RJ2, VJ1, VJ2\}$.
Il y a équiprobabilité, $\tilde{J}$ est réalisé par 6 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{6}{12}$.

$\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{1}{2}$.

(b)

$\tilde{R} \cap \tilde{J}$: « le premier jeton est rose et le second est jaune ».

Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J})$.

$\tilde{R} \cap \tilde{J} = \{RJ1, RJ2\}$.
Il y a équiprobabilité, $\tilde{R} \cap \tilde{J}$ est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{2}{12}$.

$\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{1}{6}$.

(c) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J})$.

Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) &= \mathbb{P}(\tilde{R}) + \mathbb{P}(\tilde{J}) - \mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) = \frac{7}{12}.}$$

4. (a) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

   $N = \{VR, RV\}$.
   Il y a équiprobabilité, N est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(N) = \frac{2}{12}$.

   $$\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{1}{6}.}$$

   (b)

   $\overline{N}$: « au moins un jeton est jaune ».

   (c) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

   Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{N})\\ &= 1 - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

   $$\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{5}{6}.}$$

*****

Exercice 5. 3 points

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2}{3} \times 3x^2 - 2 \times x + 4 \times 1 + 0\\ &= 2x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

2. f' est une fonction polynomiale de degré deux dont le discriminant est $(-2)^2 - 4 \times 2 \times 4 = -12 < 0$. Par conséquent f' n'admet pas de zéro et f' est du signe de son coefficient dominant, 2.

   f' est strictement positive.

3. $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1 \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \frac{2}{3}x^3$ donc

   $$f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

4.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

*****

Exercice 6. 4 points

1. Il y équiprobabilité entre les $17 + 3 = 20$ boules de U_1.
   A_2 est réalisé si la boule tirée dans U_1 est blanche donc A_2 est réalisé par 17 boules sur un total de 20 et il y a équiprobabilité donc $p_2 = \mathbb{P}(A_2) = \frac{17}{20}$.

2. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{17}{20}p_n + \frac{1}{20}(1 - p_n) \\ &= \frac{16}{20}p_n + \frac{1}{20} \\ &= \frac{8}{10}p_n + 0{,}05 \end{aligned}$$

3. $p_3 = \frac{4}{5} \times \frac{17}{20} + 0{,}05 = \frac{17}{25} + 0{,}05 = \frac{68}{100} + 0{,}05 = 0{,}73$.

4. (a) $p_1 = 1 > 0{,}25$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0{,}8p_n + 0{,}05 \\ &> 0{,}8 \times 0{,}25 + 0{,}05 \\ &> 0{,}2 + 0{,}05 \\ &> 0{,}25 \end{aligned}$$

(b) Par récurrence.
$p_1 = 1 > \frac{17}{20} = p_2$.
La fonction affine $f : x \mapsto 0{,}8x + 0{,}05$ est strictement croissante car $0{,}8 > 0$. On en déduit, à partir de l'hypothèse de récurrence que

$$f(p_{n+1}) > f(p_n)$$

Autrement dit $p_{n+2} > p_{n+1}$.

(c) Décroissante et minorée donc convergente.

(d) f étant continue on peut passer à la limite dans $p_{n+1} = f(p_n)$ et donc $\ell = f(\ell)$. Autrement dit $\ell = 0{,}8\ell + 0{,}05$
Donc $\ell = 0{,}25$.

*****

Exercice 7. 5 points

1. Sans difficulté

$$\boxed{f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Par croissance comparée :

$$\boxed{f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

2. Déterminons f'.

f est un produit de fonctions dérivables donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)(x+2)\mathrm{e}^x.}$$

3. $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. (a)

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x + 1 - m\mathrm{e}^x = 0 \\ &\iff x + 1 = m\mathrm{e}^{-x} \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x = m \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g_m(x) = 0 \iff f(x) = m.}$$

(b)

m	$-\infty$		$-\mathrm{e}^{-1}$		0		$+\infty$
Points d'intersection		0	1	2	2	1	

5. $g_m(x) - (x+1) = -m\mathrm{e}^{-x}$.

m	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \mapsto g_m(x) - (x+1)$		$+$	0	$-$	

$$\boxed{\mathcal{C}_m \text{ est au-dessus de } \mathcal{D} \text{ sur } \mathbb{R}_- \text{ et au-dessous sur } \mathbb{R}_+.}$$

*****

Exercice 8. 5 points

1. (a) $u_1 = \frac{4}{5}$.

   $u_2 = \frac{\frac{14}{5}}{\frac{13}{5}} = \frac{14}{13}$.

   (b) $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - \frac{2u_n+1}{2u_n+1} = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}$.

   (c) $u_0 - 1 = 1 > 0$ et $(-1)^0 = 1 > 0$.

   Nous pourrions travailler par disjonction des cas suivant que n est pair ou impair.

   Supposons $(u_n - 1) \times (-1)^n > 0$.

   $(u_{n+1} - 1) \times (-1)^{n+1} = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}(-1)^{n+1} = \frac{u_n-1}{2u_n+1}(-1)^n$.

   $u_n > 0$ donc $2u_n+1 > 0$ et par hypothèse de récurrence $(u_n-1)\times(-1)^n > 0$ d'où $(u_{n+1} - 1) \times (-1)^{n+1} > 0$.

2. (a)

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1} - 1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1} + 1} \\ &= \frac{\frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}} \\ &= \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} \end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$.

   $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{1}{3}$.

   $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

   (c) $u_n = \frac{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ car $-\frac{1}{3} \in]-1;1[$.

*****

Exercice 9. 5 points

1. $4 \times (-3) - 2 \times (-6) = 0$.

2. Tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$ convient.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. $\det(\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 2 - (-6) \times 1 = 0$.

4. $F \subset \mathbb{R}^2$ et $F \neq \varnothing$.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$ des vecteurs pris dans F.
$\alpha\vec{g} + \vec{h} = \begin{pmatrix} \alpha g_1 + h_1 \\ \alpha g_1 + h_1 \end{pmatrix}$.
Or $4 \times (\alpha g_1 + h_1) - 2 \times (\alpha g_1 + h_1) = \alpha(4g_1 - 2g_2) + (4h_1 - 2h_2) = \alpha 0 + 0 = 0$.
Donc $\alpha\vec{g} + \vec{h} \in F$.
Ainsi F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

5. $4 \times 2 - 2 \times 1 = 6 \neq 0$ donc $\vec{r} \notin F$.

6. F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, $F \neq \varnothing$ et $F \neq \mathbb{R}^2$ donc F est une droite vectorielle.

7. $\vec{u} \in F$ donc $F : \left\{ \begin{array}{l} x = -3t \\ -6t \end{array} \right., t \in \mathbb{R}$.

*****

Exercice 10. 4 points

On démontre par récurrence sur k que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(B_k|B_{k-1}) = \frac{(k-1)a+b}{(k-1)a+2b}$ en raisonnant sur un embranchement.

Formule des probabilité composées.
$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k-1)a+b}{(k-1)a+2b}$.
Reste à décaler les indices.

*****

Exercice 11. 4 points

a) $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ donc $n + 3\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}$.

Par croissance comparée $n\mathrm{e}^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

b) $\ln(n^2+1) = 2\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$ donc $\ln(n^2+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$.

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{n}$. Et par croissance comparée :

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.}$$

c) $\sqrt{n^2+n+1} = n\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times 1$.

De même $\sqrt[3]{n^2 - n + 1} = n^{2/3}\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{2/3} \times 1$.

Par quotient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1-2/3}$.

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

d) $\mathrm{e}^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $2^n \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}$.

Puisque $3^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.}$$

*****

Exercice 12. 3 points

1. $f'(x) = 5x^4 + n > 0$ sauf si $n = 0$ et $x = 0$.
   Donc f strictement croissante et monotone, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique zéro pour f.

2. $u_0 = 1$. Si $u_1 > 1$ alors $u_1^5 + u_1 - 1 > 0$ ce qui est impossible donc $u_1 \leqslant 1 = u_0$.
   $f(0) = -1 < 0$. Donc $u_n > 0$.
   $f_{n+1}(u_n) = u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. Minorée par 0 et décroissante donc convergente.
   $\frac{1}{n}u_n^5 + u_n - \frac{1}{n} = 0$ en passant à la limite : $\ell = 0$.

*****