# Devoir surveillé CPGE B/L. 2023/02/16.

*Les exercices qui suivent sont indépendants les uns des autres.*

***

*Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.*

***

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les* $\boxed{\textit{encadrant}}$ *ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la* ***clarté***, *de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

## Exercice 1. — 2 points

Calculez les nombres suivants.

a) $A = 2 + 3 \times 4$.

b) $B = 7 \times 8 - 1$.

c) $C = (3 + 5) \times 2$.

d) $D = -7 + 12$.

e) $E = 2 \times 3^2$.

f) $F = \dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{3}$.

g) $G = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7}$.

h) $H = 4 + \dfrac{3}{7}$.

i) $I = \dfrac{3}{6} \times \dfrac{4}{7}$.

j) $J = \dfrac{2 \times 37}{3 \times 15} \times \dfrac{4 \times 15}{7 \times 37}$.

k) $K = (3 + 2)^2$.

l) $L = 3 \times (7 - 1)^2$.

a) $A = 14$.

b) $B = 55$.

c) $C = 16$.

d) $D = 5$.

e) $E = 18$.

f) $F = \frac{7}{3}$.

g) $G = \frac{41}{35}$.

h) $H = \frac{31}{7}$.

i) $I = \frac{12}{42}$.

j) $J = \frac{8}{21}$.

k) $K = 25$.

l) $L = 108$.

*****

## Exercice 2. 2 points

1. Donnez le résultat sous forme d'une seule expression fractionnaire.

a) $A(x) = \frac{2x}{3} + 4\frac{x}{5}$. b) $B(x) = \frac{2x}{3} + \frac{x}{7}$. c) $C(x) = \frac{2x}{5} \times \frac{3x}{2}$.

d) $D(x) = \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{5}}$. e) $E(x) = \frac{x+1}{2} + \frac{3}{x+2}$. f) $F(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{2}{x^2}$.

a) $A(x) = \frac{22x}{15}$. b) $B(x) = \frac{17x}{21}$. c) $C(x) = \frac{3x^2}{5}$.

d) $D(x) = \frac{5}{2}$. e) $E(x) = \frac{(x+1)(x+2)+6}{2(x+2)}$. f) $F(x) = \frac{x^5+8}{4x^2}$.

2. Développez les expressions suivantes.

a) $M(x) = 7(2 - 5x)$. b) $N(x) = 3(3x - 4)$.

c) $P(x) = (2x + 7)(3x - 6)$. d) $Q(x) = (3 + 4x)^2$.

e) $R(x) = -5(x - 3)(x + 1)$. f) $S(x) = (2x + 1)(3x + 1)^2$.

a) $M(x) = -35x + 14$. b) $N(x) = 9x - 12$.

c) $P(x) = 6x^2 + 9x - 42$. d) $Q(x) = 16x^2 + 24x + 9$.

e) $R(x) = -5x^2 + 10x + 15$ f) $S(x) = 18x^3 + 21x^2 + 8x + 1$.

*****

## Exercice 3. 2 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a) $E_1 : 3x + 2 = 4$. b) $E_2 : -7x + 3 = 3x + 1$.

c) $E_3 : (x - 1)(x + 2) = 0$. d) $E_4 : \frac{2x+1}{234} = 0$.

e) $E_5 : x^2 = 4x$. f) $E_6 : x^2 - x + 6 = 0$.

a) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. b) $\left\{\frac{2}{10}\right\}$. c) $\{1; -2\}$.

d) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. e) $\{0; 4\}$. f) $\varnothing$.

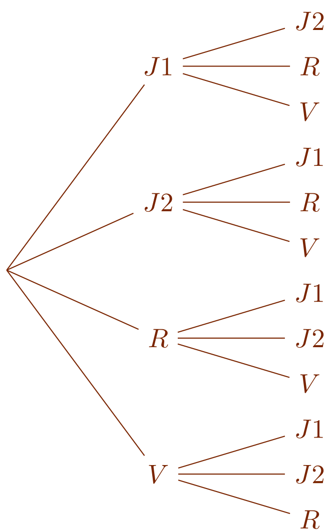
*****

## Exercice 4. 3 points

Une urne contient 4 jetons : deux jaunes, un rose et un violet.
On tire au hasard un jeton de l'urne puis un second sans remettre le premier.
On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Représenter cette situation par un arbre.
2. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
3. On considère les événements :
   — $R$ : « Le 1$^{\text{er}}$ jeton tiré est rose » ;
   — $J$ : « Le 2$^{\text{e}}$ jeton tiré est jaune ».
   (a) Déterminer $\mathbb{P}(R)$ et $\mathbb{P}(J)$.
   (b) Traduire par une phrase $R \cap J$.
   Calculer $\mathbb{P}(R \cap J)$.
   (c) Calculer $\mathbb{P}(R \cup J)$.
4. On considère l'événement : $N$ :« Aucun jeton tiré n'est jaune ».
   (a) Calculer $\mathbb{P}(N)$.
   (b) Exprimer $\overline{N}$ par une phrase.
   (c) Calculer $\mathbb{P}\left(\overline{N}\right)$.

1. La modélisation la plus simple (car utilisant l'équiprobabilité) nécessite de distinguer les deux jetons jaunes : $J1$ et $J2$.



2. D'après l'arbre précédent : $|\Omega| = 12$.

   Il y a 12 tirages possibles.

3. (a) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R})$.

   $\tilde{R} = \{RJ1, RJ2, RV\}$.
   Il y a équiprobabilité, $\tilde{R}$ est réalisé par 3 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{3}{12}$.

   $\mathbb{P}(\tilde{R}) = \frac{1}{4}$.

   Calculons $\mathbb{P}(\tilde{J})$.

   $\tilde{J} = \{J1J2, J2J1, RJ1, RJ2, VJ1, VJ2\}$.
   Il y a équiprobabilité, $\tilde{J}$ est réalisé par 6 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{6}{12}$.

   $\mathbb{P}(\tilde{J}) = \frac{1}{2}$.

   (b)

   $\tilde{R} \cap \tilde{J}$ : « le premier jeton est rose et le second est jaune ».

   Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J})$.

   $\tilde{R} \cap \tilde{J} = \{RJ1, RJ2\}$.
   Il y a équiprobabilité, $\tilde{R} \cap \tilde{J}$ est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{2}{12}$.

   $\mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) = \frac{1}{6}$.

   (c) Calculons $\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J})$.

   Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) &= \mathbb{P}(\tilde{R}) + \mathbb{P}(\tilde{J}) - \mathbb{P}(\tilde{R} \cap \tilde{J}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{R} \cup \tilde{J}) = \frac{7}{12}.$$

4. (a) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

   $N = \{VR, RV\}$.
   Il y a équiprobabilité, $N$ est réalisé par 2 issues et l'univers contient 12 issues donc : $\mathbb{P}(N) = \frac{2}{12}$.

   $$\mathbb{P}(N) = \frac{1}{6}.$$

   (b)

   $$\overline{N} : \text{« au moins un jeton est jaune ».}$$

   (c) Calculons $\mathbb{P}(N)$.

   Ici peu importe la loi de probabilité nous allons utiliser une formule qui fonctionne pour toutes les lois de probabilités.

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(N) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{N}) \\ &= 1 - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

   $$\mathbb{P}(N) = \frac{5}{6}.$$

*****

## Exercice 5. 3 points

Soit $f : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminez $f'$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{2}{3} \times 3x^2 - 2 \times x + 4 \times 1 + 0 \\ &= 2x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

2. Étudiez le signe de $f'$.

   $f'$ est une fonction polynomiale de degré deux dont le discriminant est $(-2)^2 - 4 \times 2 \times 4 = -12 < 0$. Par conséquent $f'$ n'admet pas de zéro et $f'$ est du signe de son coefficient dominant, 2.

   $$\boxed{f' \text{ est strictement positive.}}$$

3. Déterminez les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

   $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x + 1 \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{2}{3}x^3$ donc

   $$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ et } f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty}$$

4. Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| --- | --- | --- |
| $f$ | $-\infty$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

*****

## Exercice 6. 4 points

On considère deux urnes $U_1$ et $U_2$.

L'urne $U_1$ contient 17 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher.

L'urne $U_2$ contient 1 boule blanche et 19 boules noires indiscernables au toucher.

On réalise des tirages en procédant de la manière suivante :

Étape 1 : On tire au hasard une boule dans $U_1$, on note sa couleur et on la remet dans $U_1$.

Étape $n$ ($n \geqslant 2$) :

- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est blanche, on tire au hasard une boule dans $U_1$, on note sa couleur et on la remet dans $U_1$.
- Si la boule tirée à l'étape $(n-1)$ est noire, on tire au hasard une boule dans $U_2$, on note sa couleur et on la remet dans $U_2$.

On note $A$ l'évènement « le tirage a lieu dans l'urne $U_1$ à l'étape $n$ » et $p_n$ sa probabilité. On a donc $p_1 = 1$.

1. Calculer $p_2$.

   Il y équiprobabilité entre les $17 + 3 = 20$ boules de $U_1$.
   $A_2$ est réalisé si la boule tirée dans $U_1$ est blanche donc $A_2$ est réalisé par 17 boules sur un total de 20 et il y a équiprobabilité donc $p_2 = \mathbb{P}(A_2) = \frac{17}{20}$.

2. Montrer que pour tout $n$ entier naturel non nul, $p_{n+1} = 0{,}8p_n + 0{,}05$.

   D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{17}{20}p_n + \frac{1}{20}(1 - p_n) \\ &= \frac{16}{20}p_n + \frac{1}{20} \\ &= \frac{8}{10}p_n + 0{,}05 \end{aligned}$$

3. Calculer $p_3$.

   $p_3 = \frac{4}{5} \times \frac{17}{20} + 0{,}05 = \frac{17}{25} + 0{,}05 = \frac{68}{100} + 0{,}05 = 0{,}73$.

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier $n$ entier naturel non nul, $p_n > 0{,}25$.

   $p_1 = 1 > 0{,}25$.

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0{,}8p_n + 0{,}05 \\ &> 0{,}8 \times 0{,}25 + 0{,}05 \\ &> 0{,}2 + 0{,}05 \\ &> 0{,}25 \end{aligned}$$

   (b) Démontrer que la suite $(p_n)$ est décroissante.

   Par récurrence.
   $p_1 = 1 > \frac{17}{20} = p_2$.
   La fonction affine $f : x \mapsto 0{,}8x + 0{,}05$ est strictement croissante car $0{,}8 > 0$. On en déduit, à partir de l'hypothèse de récurrence que

$$f(p_{n+1}) > f(p_n)$$

   Autrement dit $p_{n+2} > p_{n+1}$.

(c) En déduire que la suite $(p_n)$ est convergente vers un réel noté $\ell$.

Décroissante et minorée donc convergente.

(d) Justifier que $\ell$ vérifie l'équation : $\ell = 0{,}8\ell + 0{,}05$. En déduire la valeur de $\ell$.

$f$ étant continue on peut passer à la limite dans $p_{n+1} = f(p_n)$ et donc $\ell = f(\ell)$. Autrement dit $\ell = 0{,}8\ell + 0{,}05$
Donc $\ell = 0{,}25$.

*****

## Exercice 7. 5 points

Dans tout ce qui suit, $m$ désigne un nombre réel quelconque.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^x.$$

1. Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Sans difficulté

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

Par croissance comparée :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

2. Démontrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^x$.

Déterminons $f'$.

$f$ est un produit de fonctions dérivables donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x)(x+2)\mathrm{e}^x.}$$

3. Dresser le tableau de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.

   $e^{x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\searrow$ | $-e^{-1}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

On définit la fonction $g_m$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$$

et on note $\mathcal{C}_m$ la courbe de la fonction $g_m$ dans un repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j} \vec{k}\right)$ du plan.

4. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x + 1 - me^{x} = 0 \\ &\iff x + 1 = me^{-x} \\ &\iff (x+1)e^{x} = m \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ g_m(x) = 0 \iff f(x) = m.}$$

   (b) Déduire de ce qui précède le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel $m$.

| $m$ | $-\infty$ | | $-e^{-1}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Points d'intersection | | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | |

5. Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_m$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel $m$.

   $g_m(x) - (x+1) = -me^{-x}$.

| $m$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x \mapsto g_m(x) - (x+1)$ | $+$ | $0$ | $-$ |

$\mathcal{C}_m$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\mathbb{R}_-$ et au-dessous sur $\mathbb{R}_+$.

*****

## Exercice 8. 5 points

On considère la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n$, $u_n > 0$.

1. (a) Calculer $u_1$ et $u_2$.

   $u_1 = \frac{4}{5}$.

   $u_2 = \frac{\frac{14}{5}}{\frac{13}{5}} = \frac{14}{13}$.

   (b) Établir que pour tout entier naturel $n$,$u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

   $u_{n+1} - 1 = \frac{u_n+2}{2u_n+1} - \frac{2u_n+1}{2u_n+1} = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}$.

   (c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

   $u_0 - 1 = 1 > 0$ et $(-1)^0 = 1 > 0$.
   Nous pourrions travailler par disjonction des cas suivant que $n$ est pair ou impair.
   Supposons $(u_n - 1) \times (-1)^n > 0$.
   $(u_{n+1} - 1) \times (-1)^{n+1} = \frac{-u_n+1}{2u_n+1}(-1)^{n+1} = \frac{u_n-1}{2u_n+1}(-1)^n$.
   $u_n > 0$ donc $2u_n+1 > 0$ et par hypothèse de récurrence $(u_n-1)\times(-1)^n > 0$ d'où $(u_{n+1} - 1) \times (-1)^{n+1} > 0$.

2. Pour tout entier naturel $n$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(a) Établir que pour tout entier naturel $n$,$v_{n+1} = \dfrac{-u_n+1}{3u_n+3}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1} \\ &= \frac{\frac{u_n+2}{2u_n+1}-1}{\frac{u_n+2}{2u_n+1}+1} \\ &= \frac{\frac{u_n+2-2u_n-1}{2u_n+1}}{\frac{u_n+2+2u_n+1}{2u_n+1}} \\ &= \frac{-u_n+1}{3u_n+3} \end{aligned}$$

(b) Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

D'après la question précédente $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n$.
$v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+1} = \frac{1}{3}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

(c) On admet que pour tout entier naturel $n$,$u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.
Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ et déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

$u_n = \frac{1+\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $-\frac{1}{3} \in ]-1;1[$.

*****

## Exercice 9. 5 points

On considère l'ensemble $F = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; 4x-2y=0 \right\}$. Ainsi $F$ est formé des vecteurs dont les coordonnées $x$ et $y$ vérifient $4x-2y=0$.

1. Montrer que $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ appartient à $F$.

   $4 \times (-3) - 2 \times (-6) = 0$.

2. Donner un autre vecteur $\vec{w}$ non nul de $F$.

   Tout vecteur colinéaire à $\vec{v}$ convient.
   $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Montrer que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

   $\det(\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -3 \times 2 - (-6) \times 1 = 0.$

4. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

   $F \subset \mathbb{R}^2$ et $F \neq \varnothing$.
   Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$ des vecteurs pris dans $F$.
   $\alpha\vec{g} + \vec{h} = \begin{pmatrix} \alpha g_1 + h_1 \\ \alpha g_1 + h_1 \end{pmatrix}$.
   Or $4 \times (\alpha g_1 + h_1) - 2 \times (\alpha g_1 + h_1) = \alpha(4g_1 - 2g_2) + (4h_1 - 2h_2) = \alpha 0 + 0 = 0$.
   Donc $\alpha\vec{g} + \vec{h} \in F$.
   Ainsi $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

5. Montrer que $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $F$.

   $4 \times 2 - 2 \times 1 = 6 \neq 0$ donc $\vec{r} \notin F$.

6. Justifier que $F$ est une droite vectorielle.

   $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, $F \neq \varnothing$ et $F \neq \mathbb{R}^2$ donc $F$ est une droite vectorielle.

7. Donner une représentation paramétrique de $F$.

   $\vec{u} \in F$ donc $F : \begin{cases} x = -3t \\ -6t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

*****

## Exercice 10. 4 points

Soient $n,a,b \in \mathbb{N}^3$. On effectue, dans une urne contenant initialement $b$ boules blanches et $b$ boules noires, une suite de tirages de la façon suivante : si les $k-1$ premiers tirages ont tous donné une boule blanche, on procède au $k^{\text{ème}}$ tirage, et alors :

- si la boule obtenue est noire, ce $k^{\text{ème}}$ tirage est le tirage final.
- si la boule obtenue est blanche, elle est replacée dans l'urne avec en plus $a$ autres boules blanches avant de procéder au tirage suivant.

On note $A_n$ l'événement « une boule blanche apparaît à chacun des $n$ tirages ». Montrer que

$$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{ka+b}{ka+2b}.$$

Rappel : $\prod$ signifie un produit. Par exemple $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} k+1 = (0+1)\times(1+1)\times(2+1)\times\cdots\times(n-1)\times n$.

On démontre par récurrence sur $k$ que : $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}(B_k|B_{k-1}) = \frac{(k-1)a+b}{(k-1)a+2b}$ en raisonnant sur un embranchement.

Formule des probabilité composées.

$\mathbb{P}(A_n) = \prod_{k=1}^{n} \frac{(k-1)a+b}{(k-1)a+2b}$.

Reste à décaler les indices.

*****

## Exercice 11. 4 points

Trouver un équivalent simple à la suite $(u_n)$ dans les cas suivants et donner si possible sa limite.

a) $u_n = (n+3\ln(n))\mathrm{e}^{-(n+1)}$.

b) $u_n = \dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1}$.

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt[3]{n^2-n+1}}$.

d) $u_n = \dfrac{n!+\mathrm{e}^n}{2^n+3^n}$.

a) $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$ donc $n+3\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\mathrm{e}^{-n}\mathrm{e}$.

Par croissance comparée $n\mathrm{e}^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

b) $\ln(n^2+1) = 2\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$ donc $\ln(n^2+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\ln(n)$.

Ainsi $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2\ln(n)}{n}$. Et par croissance comparée :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$$

c) $\sqrt{n^2+n+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n \times 1$.

De même $\sqrt[3]{n^2-n+1} = n^{2/3}\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{2/3} \times 1$.

Par quotient $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1-2/3}$.

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

d) $e^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$ et $2^n \underset{n\to+\infty}{=} o(3^n)$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{3^n}$.

Puisque $3^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

*****

## Exercice 12. 3 points

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $x^5 + nx - 1 = 0$ admet une unique solution $u_n$ dans $\mathbb{R}$.

   $f'(x) = 5x^4 + n > 0$ sauf si $n = 0$ et $x = 0$.

   Donc $f$ strictement croissante et monotone, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique zéro pour $f$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   $u_0 = 1$. Si $u_1 > 1$ alors $u_1^5 + u_1 - 1 > 0$ ce qui est impossible donc $u_1 \leqslant 1 = u_0$.

$f(0) = -1 < 0$. Donc $u_n > 0$.
$f_{n+1}(u_n) = u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Minorée par 0 et décroissante donc convergente.
$\frac{1}{n}u_n^5 + u_n - \frac{1}{n} = 0$ en passant à la limite : $\ell = 0$.

*****