Devoir surveillé CPGE B/L. 2023/01/31.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Faire soit les problèmes 0 et 1 et 2, soit les problèmes 1 et 2 et 3.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les $\boxed{\textit{encadrant}}$ *ou en les* *<u>soulignant</u>. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la* ***clarté***, *de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

Problème 0.

Les 6 questions de ce problème sont indépendantes les unes des autres.

1. En justifiant, écrire sous forme d'une seule expression fractionnaire les expressions suivantes.

   a) $H(x) = \dfrac{2}{x} + x + 1.$ b) $K(x) = \dfrac{3x}{\frac{x^2}{4}}.$

2. En justifiant, développer les expressions suivantes.

   a) $P(x) = 3(2x+1)(x-3).$ b) $Q(x) = 8(3x+2)^2.$

3. En justifiant, factoriser les expressions suivantes.

   a) $R(x) = (2x+1)(x-2)+(x-2)^2.$ b) $S(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 9.$

4. En détaillant la résolution si nécessaire, résoudre les équations suivantes.

   a) $E_1 : \ -3x+7=4.$ b) $E_2 : \ 3(x-5)(6-2x)=0.$

   c) $E_3 : \ \dfrac{4x+2}{5} = 0.$ d) $E_4 : \ x^2+3x-4=0.$

5. (a) Donner la formule explicite de la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 12$ et de raison $\frac{1}{3}$.

(b) Donner la formule explicite de la suite arithmétique (v_n) de terme initial $v_1 = 2$ et de raison 5.

(c) Si la suite (w_n) est convergente et quelle vérifie la relation de récurrence $w_{n+1} = 4w_n - 1$, quelle est forcément sa limite ?

6. On étudie, dans cette question, les variations de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + 2$$

définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(b) Calculer la dérivée f' de f.

(c) Résoudre l'équation $2x^2 + 2x - 1 = 0$.

(d) En déduire le signe de la fonction dérivée f'.

(e) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

****

Problème 1.

On appelle f la fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ par

$$f(x) = 1 + x\ln(x+2).$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie I. Étude de la fonction f

1. Déterminez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

2. Étude des variations de la dérivée f'.

(a) f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde (autrement dit la dérivée de la dérivée).
Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ en précisant les domaines de dérivabilité pour f et f'.

(b) Déterminer les limites de $f' : x \mapsto \frac{x}{x+2} + \ln(x+2)$ en -2 et en $+\infty$.

(c) Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

3. Étude du signe de $f'(x)$.

   (a) Montrer que sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α.
   On admettra que $\alpha \in [-0{,}6;-0{,}5]$.

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

4. Étude des variations de f sur $]-2;+\infty[$.

   (a) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

   (b) Dresser le tableau de variation de f sur $]-2;+\infty[$.

Partie II. Position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x_0.

1. Déterminer une équation de la droite T_0, tangente $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$,

$$d(x) = f(x) - \left[f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)\right].$$

2. Étude des variations de d.

   (a) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$,

   $$d'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

   (b) En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

3. Déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et de T_{x_0}.

Partie III. Tracés dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. (a) Placer le point de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ d'abscisse 0.

   (b) Placer le point de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ d'abscisse α.
   On prendra pour α la valeur $-0{,}54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur $0{,}8$.

2. (a) Tracer la tangente T_0 dont l'équation a été déterminée dans la partie précédente.
   On utilisera $\ln(2) \approx 0{,}69$.

   (b) Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.

3. Tracer la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2.

****

Problème 2.

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

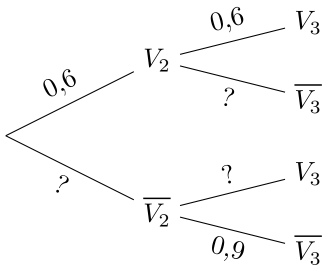
- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0{,}6 = \frac{6}{10}$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0{,}9 = \frac{9}{10}$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire ou décimale selon ce qui est le plus simple.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes.

1. Dans cette question on s'intéresse aux deuxième et troisième sondages.

   (a) Recopier puis compléter l'arbre suivant sur la copie.



(b) On note A l'événement « les 2^e et 3^e sondages sont positifs ».
Exprimer A avec V_2 et V_3 puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$ de A.

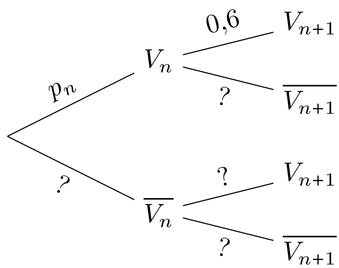
(c) On note B l'événement « les 2^e et 3^e sondages sont négatifs ».
Exprimer B avec V_2 et V_3 puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(B)$ de B.

(d) Calculez $p_3 = \mathbb{P}(V_3)$ la probabilité pour que le 3^e sondage soit positif.

(e) Un membre de l'équipe archéologique arrivé en retard constate que le troisième sondage est positif.
Calculer la probabilité que, sachant cela, le deuxième sondage ait été positif.

Dans la suite n désigne un entier naturel non nul.

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :



3. Dans cette question on cherche à calculer la probabilité d'obtenir une suite ininterrompue de sondages positifs.

(a) Comment noter l'événement S_3 : « les trois premiers sondages sont positifs » en utilisant V_1, V_2 et V_3.
Calculer sa probabilité.

(b) Comment noter l'événement S_n : « les n premiers sondages sont positifs » en utilisant V_1, V_2, ..., V_n.

(c) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique en précisant son terme initial et sa raison.

(d) En déduire la convergence de $(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$.

4. L'objet de cette question est l'étude de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

   (a) Démontrer que : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$.

   On note $u_n = p_n - 0{,}2$.

   (b) Démontrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique en précisant terme initial et raison.

   (c) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

   (d) Étudier la convergence de $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et interpréter le résultat obtenu.

****

Problème 3.

Partie I. Dans $\mathbb{R}^2$.

1. Effectuez les calculs vectoriels suivants : $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, $3\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $-2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix}$.

2. On note $G_1 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 1 = 0\right\}$, autrement dit G_1 est l'ensemble de tout les vecteurs dont les coordonnées x et y vérifient $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Démontrer que G_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3. Dans cette question on étudie l'ensemble $E = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x - y = 0\right\}$.

   (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un élément appartenant à l'ensemble E.

(b) On souhaite, dans cette question , démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

  i. On note a un nombre réel, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs appartenant à E.
  Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{s}$, obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{s} = a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, appartient aussi à E.

  ii. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

(c) Dans cette question on établit une représentation paramétrique de E.

  i. Démontrer qu'il existe un vecteur de $\mathbb{R}^2$ qui n'appartient pas à E.

  ii. Justifier que E est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

  iii. Déterminer une représentation paramétrique de E.
  On pourra par exemple utiliser $\overrightarrow{u}$ comme vecteur engendrant E.

Partie II. Dans $\mathbb{R}^3$.

On note E' la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dont une représentation paramétrique est

$$E' : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

(autrement dit E' contient tous les vecteurs $\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$ où t peut prendre toutes les valeurs réelles) et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \middle| \ 2x - y + 4z = 0 \right\}.$$

1. Démontrer que E' contient un vecteur non nul.

2. Soient $\overrightarrow{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{h} = \begin{pmatrix} -7 \\ -42 \\ -7 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

(a) Déterminer parmi $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$ ceux qui appartiennent à F.

(b) Démontrer que $\vec{g}$ et $\vec{h}$ sont colinéaires.

(c) Démontrer que $\vec{e}$ et $\vec{g}$ ne sont pas colinéaires, autrement dit, démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.

3. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. Démontrer que F n'est pas $\mathbb{R}^3$.

5. Dans cette question on cherche à comparer E' et F du point de vue de l'inclusion.

   (a) Démontrer que $E' \subset F$.

   (b) Démontrer que $E' \neq F$.

   (c) En déduire $E' \cap F$.

6. On note $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \\ -5 \end{pmatrix}$.

   On souhaite établir le fait que $\vec{m}$ peut être obtenu comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{g}$.

   (a) Vérifier que $\vec{m} \in F$.

   (b) Soient x et y des réels.
   Calculer les coordonnées du vecteur $x\vec{e} + y\vec{g}$.

   (c) Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ \quad\ 6y & = -18 \\ -x + y & = -5 \end{cases}$$

   (d) Exprimer $\vec{m}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{e}$ et $\vec{g}$.

Annexe.