Devoir surveillé CPGE B/L. 2023/01/31.

Problème 0.

1. a)

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{2}{x} + \frac{(x+1)x}{x} \\ &= \frac{2+(x+1)x}{x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} H(x) &= 3x \times \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{12x}{x^2} \end{aligned}$$

2. a)

$$\begin{aligned} P(x) &= 3[2x \times x + 2x \times (-3) + 1 \times x + 1 \times (-3)] \\ &= 3[2x^2 - 6x + x - 3] \\ &= 3[2x^2 - 5x - 3] \\ &= 3 \times 2x^2 + 3 \times (-5)x + 3 \times (-3) \\ &= 6x^2 - 15x - 9 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} Q(x) &= 8[(3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2] \\ &= 8[9x^2 + 12x + 4] \\ &= 8 \times 9x^2 + 8 \times 12x + 8 \times 4 \\ &= 72x^2 + 96x + 32 \end{aligned}$$

3. a)

$$\begin{aligned} R(x) &= (2x+1)(x-2) + (x-2)(x-2) \\ &= [(2x+1) + (x-2)](x-2) \\ &= [2x+1+x-2](x-2) \\ &= [3x-1](x-2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{2} \times 3 + 3^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 \end{aligned}$$

4.

a)

$$\begin{aligned} E_1 &\iff -3x + 7 = 0 \\ &\iff -3x + 7 - 7 = 4 - 7 \\ &\iff -3x = -3 \\ &\iff \frac{-3x}{-3} = \frac{-3}{-3} \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\}.}$$

b)

$$\begin{aligned} E_2 &\iff x - 5 = 0 \quad \text{ou} \quad 6 - 2x = 0 \\ &\iff x - 5 + 5 = 0 + 5 \quad \text{ou} \quad 6 - 2x - 6 = 0 - 6 \\ &\iff x = 5 \quad \text{ou} \quad -2x = -6 \\ &\iff x = 5 \quad \text{ou} \quad \frac{-2x}{-2} = \frac{-6}{-2} \\ &\iff x = 5 \quad \text{ou} \quad x = 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{5; 3\}.}$$

c)

$$\begin{aligned} E_3 &\iff \frac{4x+2}{5} \times 5 = 0 \times 5 \\ &\iff 4x + 2 = 0 \\ &\iff 4x + 2 - 2 = 0 - 2 \\ &\iff 4x = -2 \\ &\iff \frac{4x}{4} = \frac{-2}{4} \\ &\iff x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\tfrac{1}{2}\right\}.}$$

d)

On reconnaît une équation polynomiale de degré deux dont le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

Puisque $\Delta > 0$, (E_4) admet deux solutions réelles distinctes : $\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 1} = 1$ et $\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 1} = -4$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1; -4\}.}$$

5. (a) $u_n = u_0 \times q^n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{12}{3^n}$.

(b) $v_n = v_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$.

(c) $x \mapsto 4x - 1$ est continue donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence proposée : $\ell = 4\ell - 1$.
Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \ell - 4\ell &= 4\ell - 1 - 4\ell \\ -3\ell &= -1 \\ \frac{-3\ell}{-3} &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si la suite converge c'est nécessairement vers } \frac{1}{3}.}$$

6. (a) En $+\infty$ comme en $-\infty$ il y a des formes indéterminées. f étant polynomiale pour lever cette indétermination il suffit de travailler avec des équivalents.
$f(x) \sim \frac{2}{3}x^3$ en $+\infty$ et en $-\infty$ donc $\lim_{\pm\infty} f = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3}x^3$.

$$\boxed{\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty.}$$

(b) f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel : } f'(x) = 2x^2 + 2x - 1.}$$

(c) $2x^2 + 2x - 1$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$.
$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}.}$$

(d) Une fonction polynomiale de degré deux est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses éventuelles racines donc, d'après la question précédentes, et puisque $a = 2 > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

(e) Du précédent tableau de signe nous déduisons :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

****

Problème 1.

Partie I. Étude de la fonction f

1. f est définie si et seulement si $x+2$ car la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Or $x+2>0 \Longleftrightarrow x>-2 \leftrightarrow x\in]-2,+\infty[$.

$$\boxed{\mathscr{D}_f=]-2,+\infty[.}$$

2. (a) f, comme $x+2>0$ sur $]-2,+\infty[$, par composition puis par produit f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et, pour tout $x\in]-2,+\infty[$:

$$f'(x)=\ln(x+2)+x\frac{1}{x+2}$$

$$\boxed{\forall x\in]-2,+\infty[,\ f'(x)=\ln(x+2)+\tfrac{x}{x+2}.}$$

f' est dérivable par composition et par quotient (de dénominateur ne s'annulant pas) sur $]-2,+\infty[$ et pour tout $x\in]-2,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+2}+\frac{x+2-x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x+2}{(x+2)^2}+\frac{2}{(x+2)^2} \\ &= \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in]-2,+\infty[,\ f''(x)=\tfrac{x+4}{(x+2)^2}.}$$

(b) * $\frac{x}{x+2}\underset{x\to+\infty}{\sim}1$ et $\lim_{x\to+\infty}\ln(x+2)=+\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty.}$$

* $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\ln(x+2)=-\infty$.
  Étudions $\frac{x}{x+2}$ au voisinage de -2.

$\lim_{x\to-2} x = -2$ et $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x+2 = 0^+$ donc par quotient $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{x}{x+2} = -\infty$.

Finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f'(x) = -\infty.}$$

(c) D'après ce qui précède :

x	-2	$+\infty$
f'	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. (a) f' est continue sur $]-2,+\infty[$, strictement croissante, donc f' réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur $f'(]-2,+\infty[) = \left]\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f'(x), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right[= \mathbb{R}$.

Or $0 \in f'(]-2,+\infty[)$ donc

$$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]-2,+\infty[\text{ tel que } f'(\alpha) = 0.}$$

(b) f' est strictement croissante et s'annule en α donc :

x	-2		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

4. (a) Sans difficulté :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \ln(x+2) = -\infty$ donc, par produit :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty.}$$

(b)

x	-2		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II. Position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses tangentes

1.

$$T_0 : \; y = f'(0)(x-0) + f(0).$$

$$\boxed{T_0 : \; y = \ln(2)x + 1.}$$

2. (a) f étant dérivable sur $]-2,+\infty[$, d l'est aussi et, pour tout $x \in]-2,+\infty[$, par linéarité de la dérivation :

$$d'(x) = f'(x) - [f'(x_0) + 0]$$

$$\boxed{\forall x \in]-2,+\infty[,\; d'(x) = f'(x) - f'(x_0).}$$

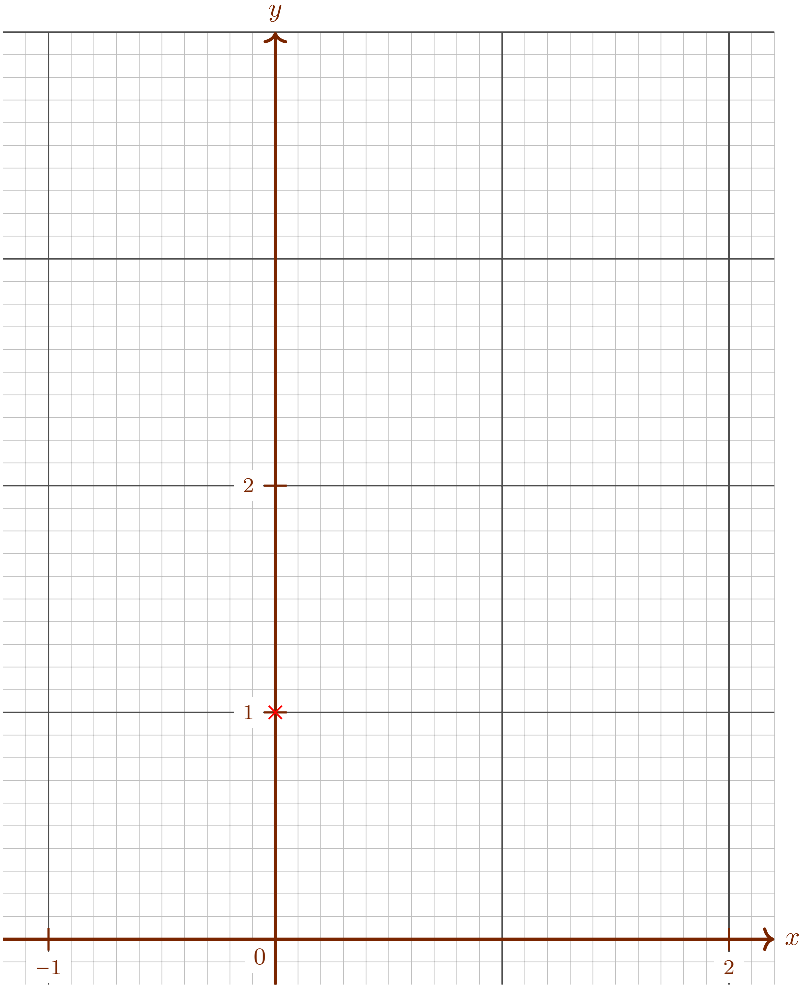
(b) Puisque f' est strictement croissante et même par définition de la stricte croissance si $x > x_0$ alors $f'(x) > f'(\alpha)$. Autrement dit si $x > \alpha$ alors $d'(x) = f'(x) - f'(x_0) > 0$.
De même si $x < x_0$ alors $d'(x) < 0$.

x	-2		x_0		$+\infty$
d'		$-$	0	$+$	
d	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. D'après le précédent tableau de variation

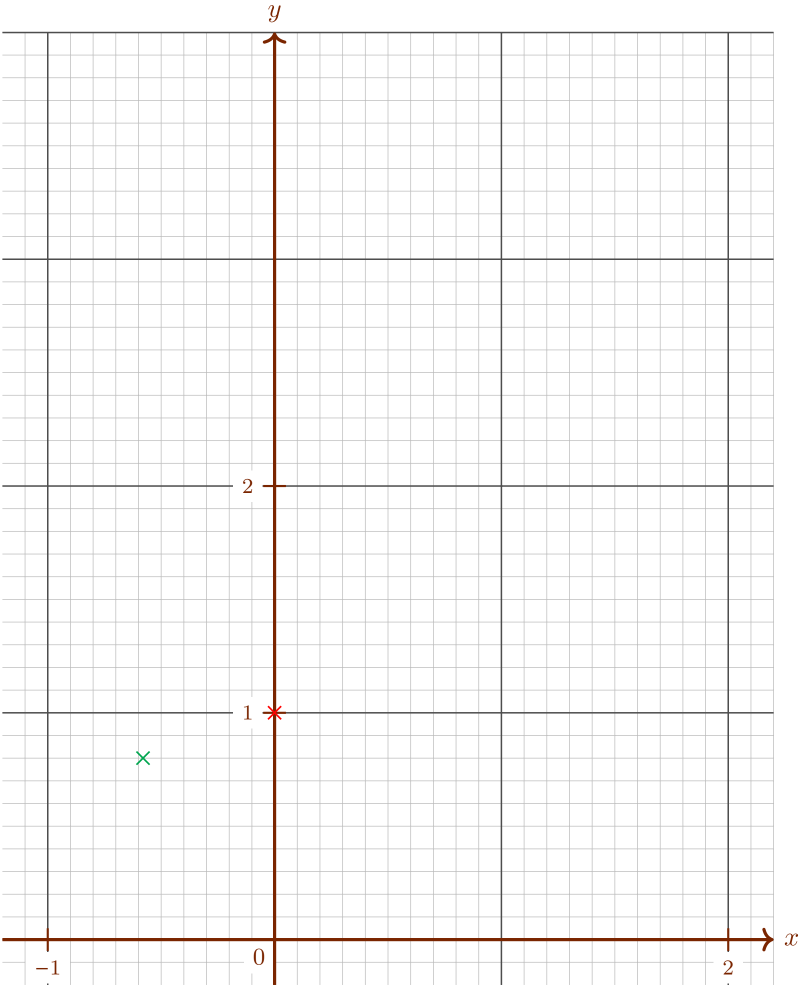
$$\boxed{(\mathcal{C}_f) \text{ est au-dessus de } T_{x_0} \text{ sur }]-2,+\infty[.}$$

Partie III. Tracés dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

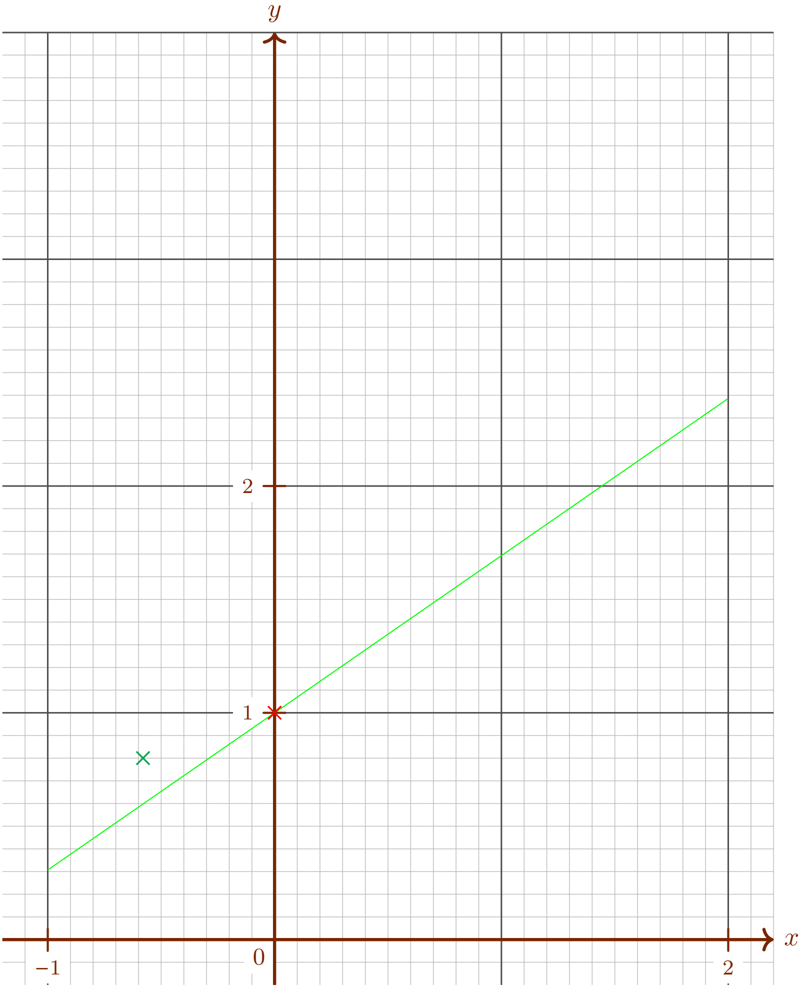


1. (a)

(b)



2. (a)



(b) Les x_0 pour lesquels la tangente passe par l'origine du repère vérifient :

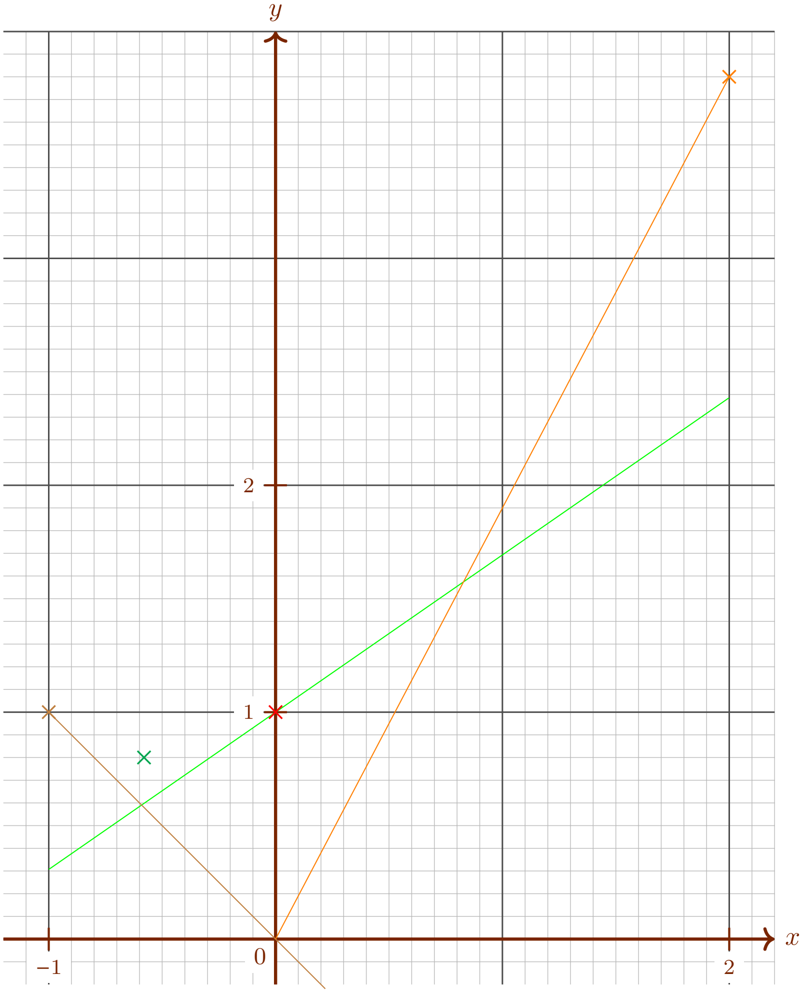
$$0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0).$$

Autrement dit :

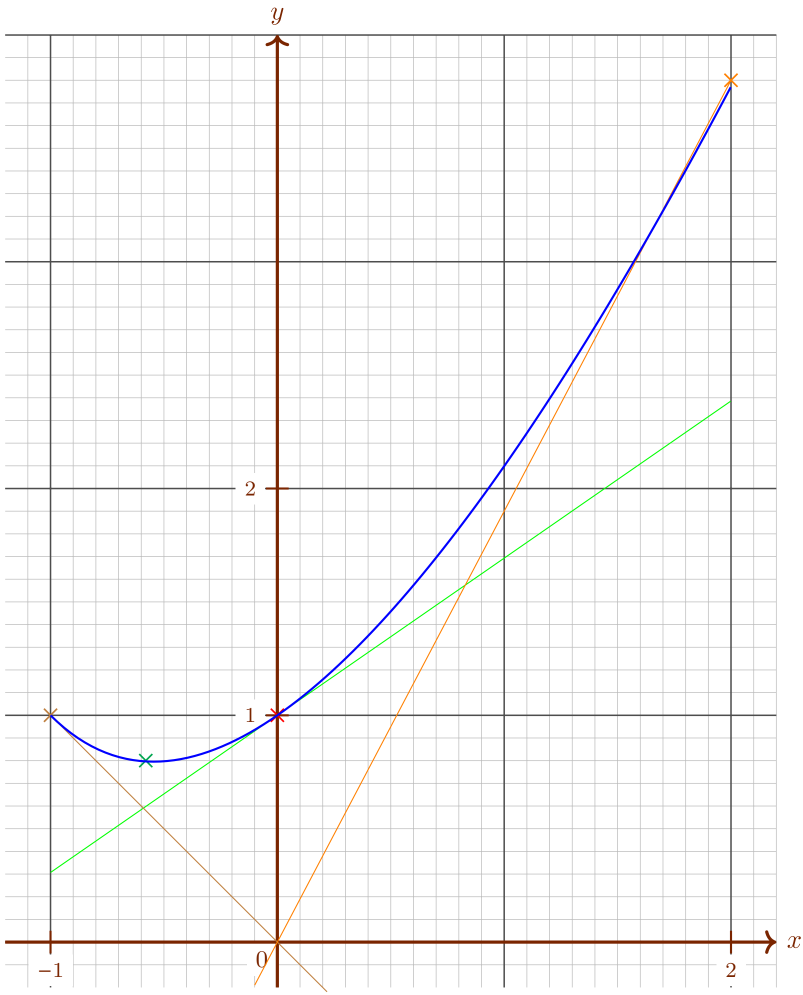
$$
\begin{aligned}
0 &= -x_0\left(\frac{x_0}{x_0+2}+\ln(x_0+2)\right)+1+x_0\ln(x_0+2)\\
0 &= -x_0\frac{x_0}{x_0+2}+1\\
x_0^2-x_0-2 &= 0
\end{aligned}
$$

Donc

$$\boxed{\text{les } x_0 \text{ cherchés sont à prendre dans } \{-1,2\}.}$$


y
2
1
0
x
−1
2

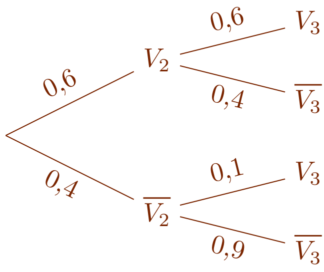
3.



****

Problème 2.

1. (a)



(b) $A = V_2 \cap V_3$ donc d'après la formule des probabilités composées, ou la définition de la probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_2 \cap V_3) &= \mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}(V_3|V_2)\\ &= 0{,}6 \times 0{,}6\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}36.}$$

(c) $B = \overline{V_2} \cap \overline{V_3}$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) &= \mathbb{P}(\overline{V_2}) \times \mathbb{P}(\overline{V_3}|\overline{V_2})\\ &= 0{,}4 \times 0{,}9\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0{,}36.}$$

(d) $\{V_2,\overline{V_2}\}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

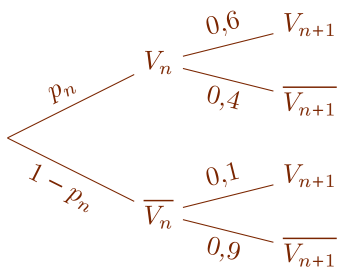
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_3) &= \mathbb{P}(V_2 \cap V_3) + \mathbb{P}(\overline{V_2} \cap V_3)\\ &= \mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}(V_3|V_2) + \mathbb{P}(\overline{V_2}) \times \mathbb{P}(V_2|\overline{V_3})\\ &= 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(V_3) = 0{,}4.}$$

(e) Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{V_3}(V_2) &= \frac{\mathbb{P}(V_2 \cap V_3)}{\mathbb{P}(V_3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}(V_3|V_2)}{\mathbb{P}(V_3)} \\ &= \frac{0{,}6 \times 0{,}6}{0{,}4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(V_2|V_3) = 0{,}9.}$$



2.

3. (a)

$$\mathbb{P}(S_3) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}&= \mathbb{P}(V_3|V_1 \cap V_2) \times \mathbb{P}(V_2|V_1) \times \mathbb{P}(V_1) \\ &= 1 \times 0{,}6 \times 0{,}6\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S_3) = 0{,}6^2.}$$

(b) $S_n = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1}) &= \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) \\
&= \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2|V_1) \times \cdots \times \\
&\quad \mathbb{P}(V_{n-1}|V_1 \cap vV_1 \cap \cdots \cap V_{n-2}) \times \mathbb{P}(V_n|V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) \\
&= \mathbb{P}(S_n) \times \mathbb{P}(V_n|V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1})
\end{aligned}$$

Or la probabilité qu'un sondage soit positif sachant que le précédent l'est aussi est 0,6 donc :

$$\mathbb{P}(S_{n+1}) = 0{,}6 \times \mathbb{P}(S_n)$$

Donc

$(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de terme initial $\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(V_1) = 1$ et de raison $q = 0{,}6$.

(d) Puisque $q \in]-1;1[$, la suite géométrique

$(\mathbb{P}(S_k))$ converge vers 0.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

D'après la formule des probabilités totales, $\{V_n, \overline{V_n}\}$ étant un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_{n+1}) &= \mathbb{P}(V_n) \times \mathbb{P}(V_{n+1}|V_n) + \mathbb{P}(\overline{V_n}) \times \mathbb{P}(V_{n+1}|\overline{V_n}) \\
&= p_n \times 0{,}6 + (1-p_n) \times 0{,}1 \\
&= 0{,}5p_n + 0{,}1
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1.$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
u_{k+1} &= p_{k+1} - 0{,}2 \\
&= 0{,}5p_k - 0{,}1 \\
&= 0{,}5(p_k - 0{,}2) \\
&= 0{,}5u_k
\end{aligned}$$

Et $u_1 = p_1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

(u_n) est géométrique de terme initial $u_1 = 0{,}8$ et de raison $q_1 = 0{,}5$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque (u_k) est géométrique de raison 0,5 et de terme initial $u_1 = 0{,}8$

$$u_k = 0{,}8 \times 0{,}5^{k-1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = 0{,}8 \times 0{,}5^{k-1} + 0{,}2.$$

(d) Puisque $q_1 = 0{,}5 \in]-1;1[$, $0{,}8 \times 0{,}5^{k-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$.
Enfin

$$p_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0{,}2.$$

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de sondages la probabilité qu'un sondage soit positif est proche de 0,2.

****

Problème 3.

Partie I. Dans $\mathbb{R}^2$.

1. $\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

   $3\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12\\6\end{pmatrix}$.

   $-2\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\8\end{pmatrix}$.

2. $0^2 + 0^2 - 1 \neq 0$ donc $\vec{0} \notin G_1$.

$$\boxed{G_1 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

3. (a) $2 \times 1 - 2 = 0$ donc

$$\boxed{\vec{u} \in E.}$$

(b) i.

$$\begin{aligned} 2x_{\vec{s}} - y_{\vec{s}} &= 2(ax_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ &= a(x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) \\ &= a \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\vec{s} \in E.}$$

ii. $E \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \in E$ et, d'après la question précédente E est stable par combinaisons linéaires donc

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

(c) i. Il suffit de trouver x et y tels que $2x - y \neq 0$ en tâtonnant.

Clairement

$$\boxed{\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E.}$$

ii. E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $\vec{u} \in E$, et qui n'est pas $\mathbb{R}^2$ puisque $\vec{g} \notin E$.
Par conséquent

$$\boxed{E \text{ est une droite vectorielle de } \mathbb{R}^2.}$$

iii. Puisque $\vec{u} \in E$ et puisque E est une droite vectorielle : $E = \{t\vec{u} | t \in \mathbb{R}\}$.
Donc :

$$\boxed{E : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Partie II. Dans $\mathbb{R}^3$.

1. Si $t = 1$ alors on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E'.}$$

2. (a) $2x_{\vec{e}} - y_{\vec{e}} + 4z_{\vec{e}} = 2 \times 2 - 0 + 4 \times (-1) = 0$ donc

$$\boxed{\vec{e} \in F.}$$

En procédant de même :

$$\boxed{\vec{f} \notin F, \vec{g} \in F, \vec{h} \in F.}$$

(b) Il y a clairement proportionnalité entre les coordonnées de $\vec{g}$ et $\vec{h}$: $-7\vec{g} = \vec{h}$.

$$\boxed{\vec{g} \text{ et } \vec{h} \text{ sont colinéaires.}}$$

(c) En utilisant les deux premières coordonnées de $\vec{e}$ et $\vec{g}$:
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 1 \times 0 = 12 \neq 0.$
Nous en déduisons qu'il n'y a pas proportionnalité entre les coordonnées de $\vec{e}$ et $\vec{g}$ donc

$\vec{e}$ et $\vec{g}$ sont linéairement indépendants.

3. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ des éléments de F. Démontrons que $\vec{p} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ appartient aussi à F.

$$\begin{aligned} & 2x_{\vec{p}} - y_{\vec{p}} + 4z_{\vec{p}} \\ & = 2(ax_1 + x_2) - (2y_1 + y_2) + 4(2z_1 + z_2) \\ & = a(2x_1 - y_1 + 4z_1) + (2x_2 - y_2 + 4z_2) \\ & = a \times 0 + 0 \\ & = 0 \end{aligned}$$

donc $\vec{p} \in F$.

$F \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{e} \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires donc

F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin F$.

$F \neq \mathbb{R}^3$.

5. (a) Soit $\vec{b} \in E'$.
D'après la représentation paramétrique de E', il existe un nombre $t_{\vec{b}}$ tel que $\vec{b} = \begin{pmatrix} t_{\vec{b}} \\ 2t_{\vec{b}} \\ 0 \end{pmatrix}$.
Or

$$\begin{aligned}&2x_{\vec{b}} - y_{\vec{b}} + 4z_{\vec{b}}\\&= 2\times t_{\vec{b}} - 2t_{\vec{b}} + 4\times 0\\&= 2t_{\vec{b}} - 2t_{\vec{b}}\\&= 0\end{aligned}$$

donc $\vec{b} \in F$.
Nous avons démontré que quelque soit $\vec{b} \in E'$, $\vec{b} \in F$ autrement dit :

$$\boxed{E' \subset F.}$$

(b) $\vec{g} \in F$ mais $\vec{g} \neq E'$ car $z_{\vec{g}} \neq 0$

$$\boxed{E' \neq F.}$$

(c) De 5.(a) nous déduisons :

$$\boxed{E' \cap F = E'.}$$

6. (a) $2\times 1 - (-18) + 4\times(-5) = 0$ donc

$$\boxed{\vec{m} \in F.}$$

(b)
$$\boxed{x\overrightarrow{e} + y\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 6y \\ -x+y \end{pmatrix}.}$$

(c) De la deuxième ligne on déduit $y = -3$ puis avec la troisième $x = 2$.
Reste à vérifier que $(2, -3)$ est bien solution du système en remplaçant dans chaque égalité, ce qui est immédiat.

$$\boxed{\text{La seule solution du système est } (2, -3).}$$

(d) D'après la question précédente :

$$\boxed{\vec{m} = 2\vec{e} - 3\vec{g}.}$$

Annexe.