Devoir surveillé CPGE B/L. 2023/01/31.

Les problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Faire soit les problèmes 0 et 1 et 2, soit les problèmes 1 et 2 et 3.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

*Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la **clarté**, de la **concision** et de la **précision** de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

Problème 0.

Les 6 questions de ce problème sont indépendantes les unes des autres.

1. En justifiant, écrire sous forme d'une seule expression fractionnaire les expressions suivantes.

   a) $H(x) = \frac{2}{x} + x + 1.$ b) $K(x) = \frac{3x}{\frac{x^2}{4}}.$

a)

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{2}{x} + \frac{(x+1)x}{x} \\ &= \frac{2+(x+1)x}{x} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} H(x) &= 3x \times \frac{4}{x^2} \\ &= \frac{12x}{x^2} \end{aligned}$$

2. En justifiant, développer les expressions suivantes.

   a) $P(x) = 3(2x+1)(x-3)$. b) $Q(x) = 8(3x+2)^2$.

   a)

$$\begin{aligned} P(x) &= 3[2x \times x + 2x \times (-3) + 1 \times x + 1 \times (-3)] \\ &= 3[2x^2 - 6x + x - 3] \\ &= 3[2x^2 - 5x - 3] \\ &= 3 \times 2x^2 + 3 \times (-5)x + 3 \times (-3) \\ &= 6x^2 - 15x - 9 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} Q(x) &= 8[(3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2] \\ &= 8[9x^2 + 12x + 4] \\ &= 8 \times 9x^2 + 8 \times 12x + 8 \times 4 \\ &= 72x^2 + 96x + 32 \end{aligned}$$

3. En justifiant, factoriser les expressions suivantes.

   a) $R(x) = (2x+1)(x-2)+(x-2)^2$. b) $S(x) = \frac{x^2}{4} + 3x + 9$.

   a)

$$\begin{aligned} R(x) &= (2x+1)(x-2) + (x-2)(x-2) \\ &= [(2x+1) + (x-2)](x-2) \\ &= [2x+1+x-2](x-2) \\ &= [3x-1](x-2) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} S(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 2 \times \frac{x}{2} \times 3 + 3^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 \end{aligned}$$

4. En détaillant la résolution si nécessaire, résoudre les équations suivantes.

a) $E_1 :\ -3x + 7 = 4.$

b) $E_2 :\ 3(x-5)(6-2x) = 0.$

c) $E_3 :\ \dfrac{4x+2}{5} = 0.$

d) $E_4 :\ x^2 + 3x - 4 = 0.$

a)

$$\begin{aligned} E_1 &\Leftrightarrow -3x + 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow -3x + 7 - 7 = 4 - 7 \\ &\Leftrightarrow -3x = -3 \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} = \frac{-3}{-3} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1\}.}$$

b)

$$\begin{aligned}
E_2 &\Longleftrightarrow x-5=0 \quad \text{ou} \quad 6-2x=0\\
&\Longleftrightarrow x-5+5=0+5 \quad \text{ou} \quad 6-2x-6=0-6\\
&\Longleftrightarrow x=5 \quad \text{ou} \quad -2x=-6\\
&\Longleftrightarrow x=5 \quad \text{ou} \quad \frac{-2x}{-2}=\frac{-6}{-2}\\
&\Longleftrightarrow x=5 \quad \text{ou} \quad x=3
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S}=\{5;3\}.$$

c)

$$\begin{aligned}
E_3 &\Longleftrightarrow \frac{4x+2}{5}\times 5=0\times 5\\
&\Longleftrightarrow 4x+2=0\\
&\Longleftrightarrow 4x+2-2=0-2\\
&\Longleftrightarrow 4x=-2\\
&\Longleftrightarrow \frac{4x}{4}=\frac{-2}{4}\\
&\Longleftrightarrow x=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{S}=\left\{-\tfrac{1}{2}\right\}.$$

d)

On reconnaît une équation polynomiale de degré deux dont le discriminant est $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

Puisque $\Delta > 0$, (E_4) admet deux solutions réelles distinctes : $\frac{-3+\sqrt{25}}{2\times 1} = 1$ et $\frac{-3-\sqrt{25}}{2\times 1} = -4$.

$$\boxed{\mathscr{S} = \{1; -4\}.}$$

5. (a) Donner la formule explicite de la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = 12$ et de raison $\frac{1}{3}$.

   $u_n = u_0 \times q^n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{12}{3^n}$.

   (b) Donner la formule explicite de la suite arithmétique (v_n) de terme initial $v_1 = 2$ et de raison 5.

   $v_n = v_1 + (n-1)r = 2 + (n-1) \times 5 = 5n - 3$.

   (c) Si la suite (w_n) est convergente et quelle vérifie la relation de récurrence $w_{n+1} = 4w_n - 1$, quelle est forcément sa limite ?

   $x \mapsto 4x - 1$ est continue donc, en passant à la limite dans la relation de récurrence proposée : $\ell = 4\ell - 1$.
   Cette équation équivaut successivement à :

$$\begin{aligned} \ell - 4\ell &= 4\ell - 1 - 4\ell \\ -3\ell &= -1 \\ \frac{-3\ell}{-3} &= \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si la suite converge c'est nécessairement vers } \tfrac{1}{3}.}$$

6. On étudie, dans cette question, les variations de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 + x^2 - x + 2$$

définie sur $\mathbb{R}$.

(a) Étudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

En $+\infty$ comme en $-\infty$ il y a des formes indéterminées. f étant polynomiale pour lever cette indétermination il suffit de travailler avec des équivalents.
$f(x) \sim \frac{2}{3}x^3$ en $+\infty$ et en $-\infty$ donc $\lim_{\pm\infty} f = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{3}x^3$.

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

(b) Calculer la dérivée f' de f.

f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } f'(x) = 2x^2 + 2x - 1.$$

(c) Résoudre l'équation $2x^2 + 2x - 1 = 0$.

$2x^2 + 2x - 1$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 12$.
$\Delta > 0$ donc le trinôme admet deux racines réelles distinctes : $x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathscr{S} = \left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

(d) En déduire le signe de la fonction dérivée f'.

Une fonction polynomiale de degré deux est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses éventuelles racines donc, d'après la question précédentes, et puisque $a = 2 > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

(e) En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Du précédent tableau de signe nous déduisons :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

****

Problème 1.

On appelle f la fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}_f$ par

$$f(x) = 1 + x\ln(x+2).$$

On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Partie I. Étude de la fonction f

1. Déterminez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

   f est définie si et seulement si $x+2$ car la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Or $x+2>0 \Longleftrightarrow x>-2 \leftrightarrow x \in]-2,+\infty[$.

   $$\boxed{\mathscr{D}_f =]-2,+\infty[.}$$

2. Étude des variations de la dérivée f'.

   (a) f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde (autrement dit la dérivée de la dérivée).
   Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ en précisant les domaines de dérivabilité pour f et f'.

   f, comme $x+2>0$ sur $]-2,+\infty[$, par composition puis par produit f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et, pour tout $x \in]-2,+\infty[$:

   $$f'(x) = \ln(x+2) + x\frac{1}{x+2}$$

$$\boxed{\forall x \in]-2,+\infty[,\ f'(x) = \ln(x+2) + \tfrac{x}{x+2}.}$$

f' est dérivable par composition et par quotient (de dénominateur ne s'annulant pas) sur $]-2,+\infty[$ et pour tout $x \in]-2,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x+2}{(x+2)^2} + \frac{2}{(x+2)^2} \\ &= \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]-2,+\infty[,\ f''(x) = \tfrac{x+4}{(x+2)^2}.}$$

(b) Déterminer les limites de $f' : x \mapsto \frac{x}{x+2} + \ln(x+2)$ en -2 et en $+\infty$.

* $\frac{x}{x+2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x+2) = +\infty$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty.}$$

* $\lim_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} \ln(x+2) = -\infty$.
Étudions $\frac{x}{x+2}$ au voisinage de -2.
$\lim_{x\to-2} x = -2$ et $\lim_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} x+2 = 0^+$ donc par quotient $\lim_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} \frac{x}{x+2} = -\infty$.
Finalement

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to-2 \\ x>-2}} f'(x) = -\infty.}$$

(c) Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

D'après ce qui précède :

x	-2		$+\infty$
f'	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Étude du signe de $f'(x)$.

   (a) Montrer que sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α.
   On admettra que $\alpha \in [-0{,}6;-0{,}5]$.

   f' est continue sur $]-2,+\infty[$, strictement croissante, donc f' réalise une bijection de $]-2,+\infty[$ sur $f'(]-2,+\infty[) = \left]\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f'(x), \lim_{x\to+\infty} f'(x)\right[= \mathbb{R}$.
   Or $0 \in f'(]-2,+\infty[)$ donc

   $$\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]-2,+\infty[\text{ tel que } f'(\alpha)=0.}$$

   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

   f' est strictement croissante et s'annule en α donc :

x	-2		α		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	

4. Étude des variations de f sur $]-2;+\infty[$.

   (a) Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

   Sans difficulté :

   $$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$$

   $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \ln(x+2) = -\infty$ donc, par produit :

   $$\boxed{\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x) = +\infty.}$$

   (b) Dresser le tableau de variation de f sur $]-2;+\infty[$.

x	-2		α		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie II. Position de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à ses tangentes

Soit x_0 un réel appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$, on appelle T_{x_0} la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse x_0.

1. Déterminer une équation de la droite T_0, tangente $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0.

$$T_0 : \ y = f'(0)(x-0) + f(0).$$

$$\boxed{T_0 : \ y = \ln(2)x + 1.}$$

On note, pour x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$,

$$d(x) = f(x) - \left[f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\right].$$

2. Étude des variations de d.

(a) Vérifier que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-2;+\infty[$,

$$d'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

f étant dérivable sur $]-2,+\infty[$, d l'est aussi et, pour tout $x \in]-2,+\infty[$, par linéarité de la dérivation :

$$d'(x) = f'(x) - [f'(x_0) + 0]$$

$$\boxed{\forall x \in]-2,+\infty[,\ d'(x) = f'(x) - f'(x_0).}$$

(b) En utilisant la croissance de la fonction f', donner le signe de $d'(x)$ selon les valeurs de x. En déduire les variations de d sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

Puisque f' est strictement croissante et même par définition de la stricte croissance si $x > x_0$ alors $f'(x) > f'(\alpha)$. Autrement dit si $x > \alpha$ alors $d'(x) = f'(x) - f'(x_0) > 0$.
De même si $x < x_0$ alors $d'(x) < 0$.

x	-2		x_0		$+\infty$
d'		$-$	0	$+$	
d	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

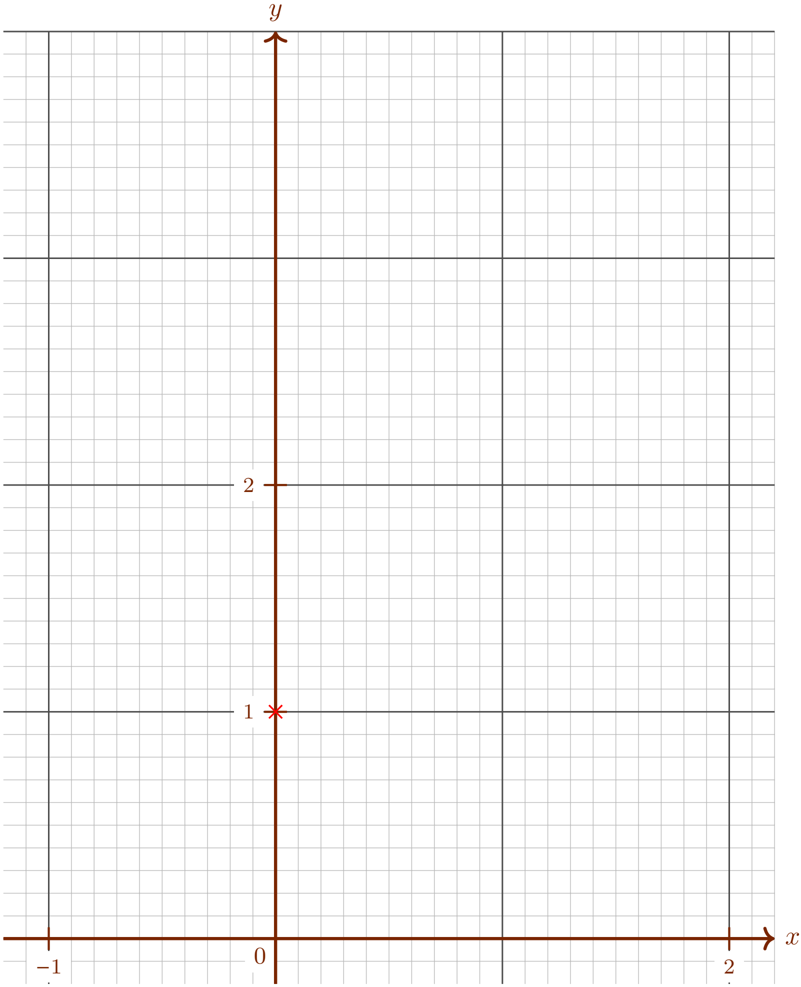
3. Déterminer la position relative de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et de T_{x_0}.

   D'après le précédent tableau de variation

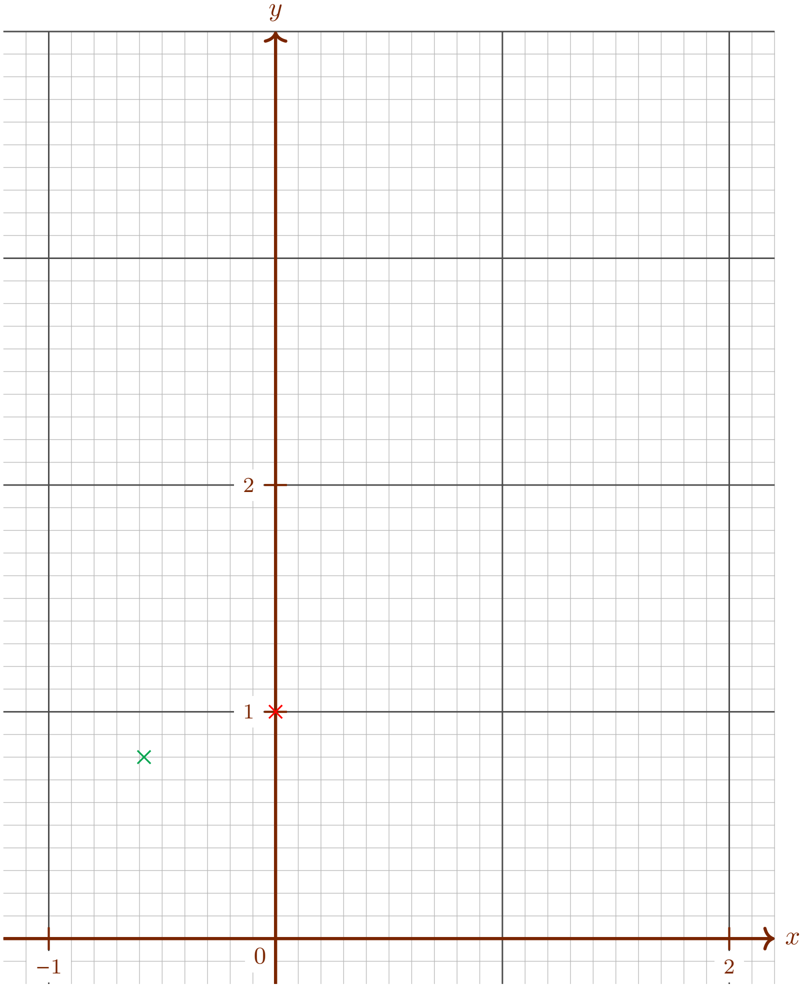
   $$\boxed{\left(\mathcal{C}_f\right) \text{ est au-dessus de } T_{x_0} \text{ sur }]-2, +\infty[.}$$

Partie III. Tracés dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

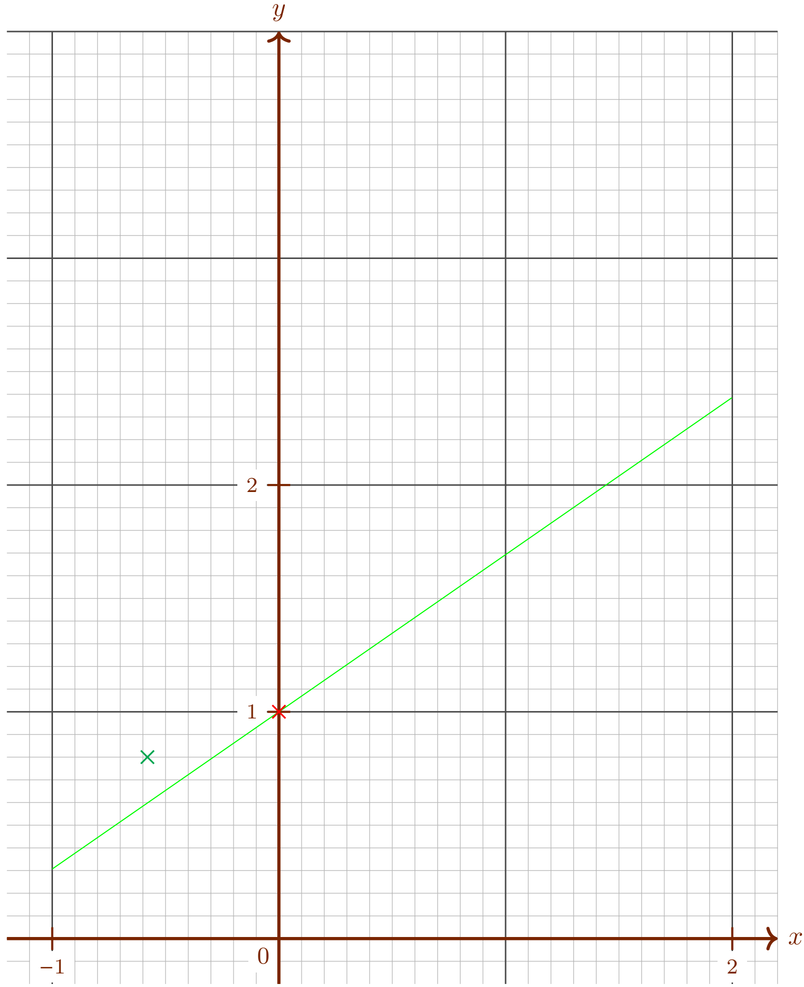
1. (a) Placer le point de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ d'abscisse 0.



(b) Placer le point de $\left(\mathcal{C}_f\right)$ d'abscisse α.
On prendra pour α la valeur $-0{,}54$ et pour $f(\alpha)$ la valeur $0{,}8$.



2. (a) Tracer la tangente T_0 dont l'équation a été déterminée dans la partie précédente.
On utilisera $\ln(2) \approx 0{,}69$.



(b) Trouver les réels x_0 pour lesquels les tangentes T_{x_0} passent par l'origine du repère puis tracer ces droites.

Les x_0 pour lesquels la tangente passe par l'origine du repère vérifient :

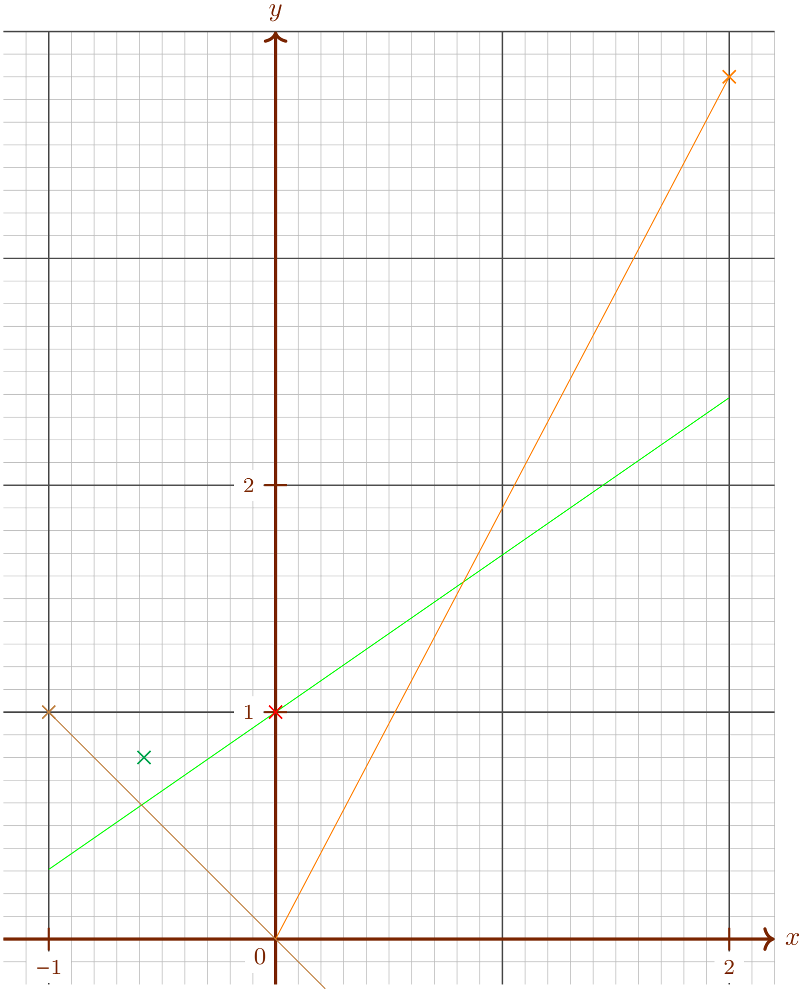
$$0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0).$$

Autrement dit :

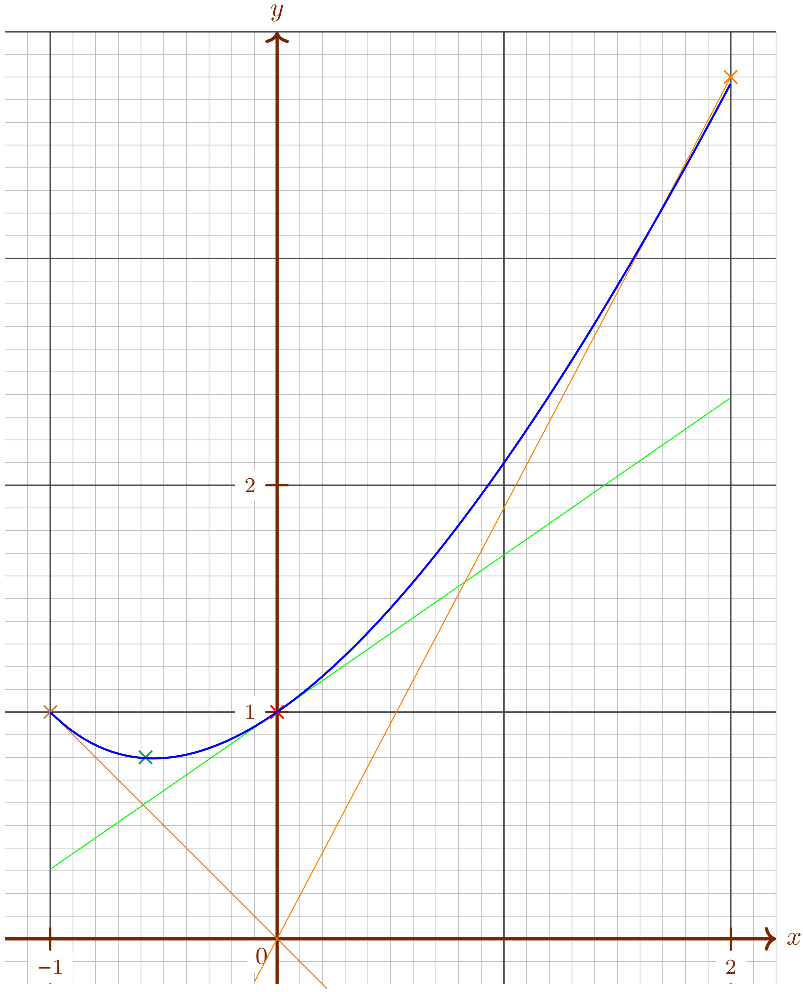
$$\begin{aligned}
0 &= -x_0\left(\frac{x_0}{x_0+2} + \ln(x_0+2)\right) + 1 + x_0\ln(x_0+2)\\
0 &= -x_0\frac{x_0}{x_0+2} + 1\\
x_0^2 - x_0 - 2 &= 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{les } x_0 \text{ cherchés sont à prendre dans } \{-1,2\}.}$$



3. Tracer la courbe $\left(\mathcal{C}_f\right)$ pour les valeurs de x comprises entre -1 et 2.



****

Problème 2.

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

L'évènement : « le n-ième sondage est positif » est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

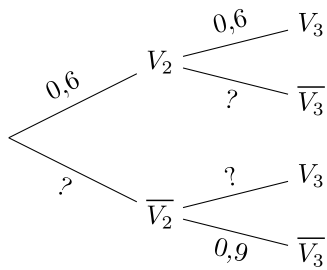
- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0{,}6 = \frac{6}{10}$ d'être aussi positif ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0{,}9 = \frac{9}{10}$ d'être aussi négatif.

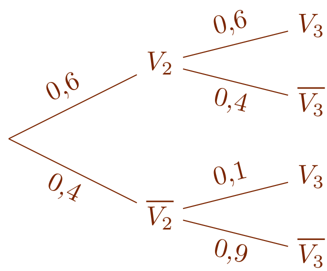
On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire : $p_1 = 1$.

Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire ou décimale selon ce qui est le plus simple.
Les questions 3 et 4 sont indépendantes.

1. Dans cette question on s'intéresse aux deuxième et troisième sondages.

   (a) Recopier puis compléter l'arbre suivant sur la copie.





   (b) On note A l'événement « les 2^e^ et 3^e^ sondages sont positifs ».
   Exprimer A avec V_2 et V_3 puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$ de A.

   $A = V_2 \cap V_3$ donc d'après la formule des probabilités composées, ou la définition de la probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_2 \cap V_3) &= \mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}(V_3|V_2) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}6\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = 0{,}36.}$$

(c) On note B l'événement « les 2e et 3e sondages sont négatifs ».
Exprimer B avec V_2 et V_3 puis calculer la probabilité $\mathbb{P}(B)$ de B.

$B = \overline{V_2} \cap \overline{V_3}$ donc d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{V_2} \cap \overline{V_3}) &= \mathbb{P}(\overline{V_2}) \times \mathbb{P}(\overline{V_3}|\overline{V_2}) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}9\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(B) = 0{,}36.}$$

(d) Calculez $p_3 = \mathbb{P}(V_3)$ la probabilité pour que le 3e sondage soit positif.

$\{V_2,\overline{V_2}\}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_3) &= \mathbb{P}(V_2 \cap V_3) + \mathbb{P}(\overline{V_2} \cap V_3) \\ &= \mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}(V_3|V_2) + \mathbb{P}(\overline{V_2}) \times \mathbb{P}(V_2|\overline{V_3}) \\ &= 0{,}6 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}1\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(V_3) = 0{,}4.}$$

(e) Un membre de l'équipe archéologique arrivé en retard constate que le troisième sondage est positif.
Calculer la probabilité que, sachant cela, le deuxième sondage ait été positif.

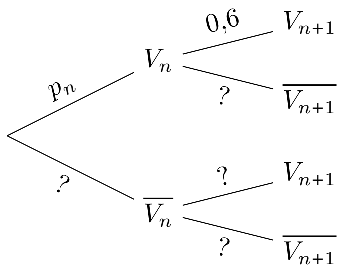
Par définition de la probabilité conditionnelle :

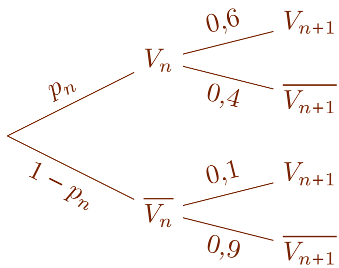
$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{V_3}(V_2) &= \frac{\mathbb{P}(V_2 \cap V_3)}{\mathbb{P}(V_3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(V_2) \times \mathbb{P}(V_3|V_2)}{\mathbb{P}(V_3)} \\ &= \frac{0{,}6 \times 0{,}6}{0{,}4}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(V_2|V_3) = 0{,}9.}$$

Dans la suite n désigne un entier naturel non nul.

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé :





3. Dans cette question on cherche à calculer la probabilité d'obtenir une suite ininterrompue de sondages positifs.

   (a) Comment noter l'événement S_3 : « les trois premiers sondages sont positifs » en utilisant V_1, V_2 et V_3.

Calculer sa probabilité.

$$\mathbb{P}(S_3) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap V_3)$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} &= \mathbb{P}(V_3|V_1 \cap V_2) \times \mathbb{P}(V_2|V_1) \times \mathbb{P}(V_1) \\ &= 1 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S_3) = 0{,}6^2.}$$

(b) Comment noter l'événement S_n : « les n premiers sondages sont positifs » en utilisant V_1, V_2, ..., V_n.

$S_n = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$.

(c) Justifier que la suite $(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique en précisant son terme initial et sa raison.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{n+1}) &= \mathbb{P}(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) \\ &= \mathbb{P}(V_1) \times \mathbb{P}(V_2|V_1) \times \cdots \times \\ &\quad \mathbb{P}(V_{n-1}|V_1 \cap vV_1 \cap \cdots \cap V_{n-2}) \times \mathbb{P}(V_n|V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(S_n) \times \mathbb{P}(V_n|V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{n-1}) \end{aligned}$$

Or la probabilité qu'un sondage soit positif sachant que le précédent l'est aussi est 0,6 donc :

$$\mathbb{P}(S_{n+1}) = 0{,}6 \times \mathbb{P}(S_n)$$

Donc

$(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de terme initial $\mathbb{P}(S_1) = \mathbb{P}(V_1) = 1$ et de raison $q = 0{,}6$.

(d) En déduire la convergence de $(\mathbb{P}(S_k))_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Puisque $q \in]-1;1[$, la suite géométrique

$$\boxed{(\mathbb{P}(S_k)) \text{ converge vers } 0.}$$

4. L'objet de cette question est l'étude de la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

(a) Démontrer que : $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après la formule des probabilités totales, $\{V_n, \overline{V_n}\}$ étant un système complet d'événements :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(V_{n+1}) &= \mathbb{P}(V_n) \times \mathbb{P}(V_{n+1}|V_n) + \mathbb{P}(\overline{V_n}) \times \mathbb{P}(V_{n+1}|\overline{V_n})\\ &= p_n \times 0{,}6 + (1-p_n) \times 0{,}1\\ &= 0{,}5p_n + 0{,}1\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}1.}$$

On note $u_n = p_n - 0{,}2$.

(b) Démontrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique en précisant terme initial et raison.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}u_{k+1} &= p_{k+1} - 0{,}2\\ &= 0{,}5p_k - 0{,}1\\ &= 0{,}5(p_k - 0{,}2)\\ &= 0{,}5u_k\end{aligned}$$

Et $u_1 = p_1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est géométrique de terme initial } u_1 = 0{,}8 \text{ et de raison } q_1 = 0{,}5.}$$

(c) En déduire une expression de p_n en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Puisque (u_k) est géométrique de raison 0,5 et de terme initial $u_1 = 0{,}8$

$$u_k = 0{,}8 \times 0{,}5^{k-1}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_k = 0{,}8 \times 0{,}5^{k-1} + 0{,}2.}$$

(d) Étudier la convergence de $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ et interpréter le résultat obtenu.

Puisque $q_1 = 0{,}5 \in]-1;1[$, $0{,}8 \times 0{,}5^{k-1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Enfin

$$\boxed{p_k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0{,}2.}$$

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de sondages la probabilité qu'un sondage soit positif est proche de 0,2.

****

Problème 3.

Partie I. Dans $\mathbb{R}^2$.

1. Effectuez les calculs vectoriels suivants : $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $-2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.
$3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$.
$-2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. On note $G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 - 1 = 0 \right\}$, autrement dit G_1 est l'ensemble de tout les vecteurs dont les coordonnées x et y vérifient $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Démontrer que G_1 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$0^2 + 0^2 - 1 \neq 0$ donc $\vec{0} \notin G_1$.

$$\boxed{G_1 \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

3. Dans cette question on étudie l'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 2x - y = 0 \right\}$.

   (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un élément appartenant à l'ensemble E.

   $2 \times 1 - 2 = 0$ donc

   $$\boxed{\vec{u} \in E.}$$

   (b) On souhaite, dans cette question , démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

      i. On note a un nombre réel, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs appartenant à E.
      Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{s}$, obtenu comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{s} = a\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, appartient aussi à E.

$$\begin{aligned} 2x_{\vec{s}} - y_{\vec{s}} &= 2(ax_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ &= a(x_1 - y_1) + (2x_2 - y_2) \\ &= a \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

      donc

      $$\boxed{\vec{s} \in E.}$$

ii. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

$E \subset \mathbb{R}^2$, $\vec{u} \in E$ et, d'après la question précédente E est stable par combinaisons linéaires donc

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2.}$$

(c) Dans cette question on établit une représentation paramétrique de E.

i. Démontrer qu'il existe un vecteur de $\mathbb{R}^2$ qui n'appartient pas à E.

Il suffit de trouver x et y tels que $2x - y \neq 0$ en tâtonnant.

Clairement

$$\boxed{\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E.}$$

ii. Justifier que E est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas réduit à $\{0\}$ puisque $\vec{u} \in E$, et qui n'est pas $\mathbb{R}^2$ puisque $\vec{g} \notin E$.
Par conséquent

$$\boxed{E \text{ est une droite vectorielle de } \mathbb{R}^2.}$$

iii. Déterminer une représentation paramétrique de E.
On pourra par exemple utiliser $\overrightarrow{u}$ comme vecteur engendrant E.

Puisque $\vec{u} \in E$ et puisque E est une droite vectorielle : $E = \{t\vec{u} | t \in \mathbb{R}\}$.
Donc :

$$\boxed{E : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.}$$

Partie II. Dans $\mathbb{R}^3$.

On note E' la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dont une représentation paramétrique est

$$E' : \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \end{array} \right., \ t \in \mathbb{R},$$

(autrement dit E' contient tous les vecteurs $\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}$ où t peut prendre toutes les valeurs réelles) et

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x - y + 4z = 0 \right\}.$$

1. Démontrer que E' contient un vecteur non nul.

   Si $t = 1$ alors on obtient le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   $$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in E'.}$$

2. Soient $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{h} = \begin{pmatrix} -7 \\ -42 \\ -7 \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Déterminer parmi $\vec{e}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ et $\vec{h}$ ceux qui appartiennent à F.

   $2x_{\vec{e}} - y_{\vec{e}} + 4z_{\vec{e}} = 2 \times 2 - 0 + 4 \times (-1) = 0$ donc

   $$\boxed{\vec{e} \in F.}$$

   En procédant de même :

   $$\boxed{\vec{f} \notin F, \vec{g} \in F, \vec{h} \in F.}$$

(b) Démontrer que $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{h}$ sont colinéaires.

Il y a clairement proportionnalité entre les coordonnées de $\vec{g}$ et $\vec{h}$: $-7\vec{g} = \vec{h}$.

$$\boxed{\vec{g} \text{ et } \vec{h} \text{ sont colinéaires.}}$$

(c) Démontrer que $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{g}$ ne sont pas colinéaires, autrement dit, démontrer qu'ils sont linéairement indépendants.

En utilisant les deux premières coordonnées de $\vec{e}$ et $\vec{g}$:
$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 1 \times 0 = 12 \neq 0.$
Nous en déduisons qu'il n'y a pas proportionnalité entre les coordonnées de $\vec{e}$ et $\vec{g}$ donc

$$\boxed{\vec{e} \text{ et } \vec{g} \text{ sont linéairement indépendants.}}$$

3. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ des éléments de F. Démontrons que $\vec{p} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ appartient aussi à F.

$$\begin{aligned}
&2x_{\vec{p}} - y_{\vec{p}} + 4z_{\vec{p}} \\
&= 2(ax_1 + x_2) - (2y_1 + y_2) + 4(2z_1 + z_2) \\
&= a(2x_1 - y_1 + 4z_1) + (2x_2 - y_2 + 4z_2) \\
&= a \times 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc $\vec{p} \in F$.

$F \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{e} \in F$ et F est stable par combinaisons linéaires donc

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

4. Démontrer que F n'est pas $\mathbb{R}^3$.

   $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \notin F$.

   $$\boxed{F \neq \mathbb{R}^3.}$$

5. Dans cette question on cherche à comparer E' et F du point de vue de l'inclusion.

   (a) Démontrer que $E' \subset F$.

   Soit $\vec{b} \in E'$.
   D'après la représentation paramétrique de E', il existe un nombre $t_{\vec{b}}$ tel que $\vec{b} = \begin{pmatrix}t_{\vec{b}}\\2t_{\vec{b}}\\0\end{pmatrix}$.
   Or

   $$\begin{aligned}&2x_{\vec{b}} - y_{\vec{b}} + 4z_{\vec{b}}\\ &= 2 \times t_{\vec{b}} - 2t_{\vec{b}} + 4 \times 0\\ &= 2t_{\vec{b}} - 2t_{\vec{b}}\\ &= 0\end{aligned}$$

   donc $\vec{b} \in F$.
   Nous avons démontré que quelque soit $\vec{b} \in E'$, $\vec{b} \in F$ autrement dit :

   $$\boxed{E' \subset F.}$$

   (b) Démontrer que $E' \neq F$.

   $\vec{g} \in F$ mais $\vec{g} \neq E'$ car $z_{\vec{g}} \neq 0$

   $$\boxed{E' \neq F.}$$

(c) En déduire $E' \cap F$.

De 5.(a) nous déduisons :

$$E' \cap F = E'.$$

6. On note $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \\ -5 \end{pmatrix}$.

On souhaite établir le fait que $\vec{m}$ peut être obtenu comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}$ et $\vec{g}$.

(a) Vérifier que $\vec{m} \in F$.

$2 \times 1 - (-18) + 4 \times (-5) = 0$ donc

$$\vec{m} \in F.$$

(b) Soient x et y des réels.
Calculer les coordonnées du vecteur $x\vec{e} + y\vec{g}$.

$$x\vec{e} + y\vec{g} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 6y \\ -x + y \end{pmatrix}.$$

(c) Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x + y & = 1 \\ 6y & = -18 \\ -x + y & = -5 \end{cases}$$

De la deuxième ligne on déduit $y = -3$ puis avec la troisième $x = 2$.
Reste à vérifier que $(2, -3)$ est bien solution du système en remplaçant dans chaque égalité, ce qui est immédiat.

La seule solution du système est $(2, -3)$.

(d) Exprimer $\overrightarrow{m}$ comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{e}$ et $\overrightarrow{g}$.

D'après la question précédente :

$$\boxed{\vec{m} = 2\vec{e} - 3\vec{g}.}$$

Annexe.