Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/12/08.

Les exercices et problèmes qui suivent sont indépendants les uns des autres.

***

Pour répondre à une question, on pourra toujours utiliser les résultats de questions précédentes, à condition de clairement l'indiquer.

***

Il est demandé de soigneusement numéroter les questions et de mettre clairement les réponses en évidence, par exemple en les encadrant ou en les soulignant. Lors de la correction, il sera fait grand cas de la ***clarté****, de la* ***concision*** *et de la* ***précision*** *de la rédaction. L'utilisation de surligneur ou de crayon n'est pas recommandé.*

***

Début du sujet A noté sur 15.

EXERCICE 1 : calcul.

1. Donnez le résultat sous forme d'une seule expression fractionnaire. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\dfrac{x}{7} - \dfrac{x}{2}$. b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}$. c) $\dfrac{x}{6} \times \dfrac{2x}{7}$. d) $\dfrac{\frac{2}{x}}{\frac{2x}{5}}$.

2. Donnez le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers les plus petits possibles : par exemple $\sqrt{68} = \sqrt{2^2 \times 17} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{17} = 2\sqrt{17}$. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $\sqrt{81}$. b) $\sqrt{48}$. c) $\sqrt{3} \times \sqrt{33}$. d) $\sqrt{a^2 b}$.

3. Écrivez les expressions suivantes sous la forme a^n où $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. *Aucune justification n'est exigée.*

   a) $A = a^2 \times a^{12} \times a^{-5}$. b) $B = \dfrac{a^{34} \times a^{-22}}{\left(a^{12}\right)^2}$.

4. Développez les expressions suivantes.

   a) $M(x) = -2(x+3)$. b) $N(x) = 6(7x-8)$.

   c) $P(x) = (8x+2)(6x-9)$. d) $Q(x) = (2x+1)^2$.

   e) $R(x) = 6(x-7)(5x-4)$. f) $S(x) = -(8x-7)(x+2)^2$.

5. Factorisez les expressions suivantes.

   a) $T(x) = 3x^{14} + x^2 + 3x$.

   b) $U(x) = x^2 - 4x + 4$.

   c) $V(x) = x^2 - 38$.

   d) $W(x) = (x^2 - 9) - (x + 3)$.

EXERCICE 2 : résolution d'équations.

Résolvez les équations suivantes d'inconnue x.

a) $5x + 12 = 7$.

b) $(x - 3)(5x - 2) = 0$.

c) $x^2 - 4x = -4$.

d) $\dfrac{120x}{\pi} = 0$.

EXERCICE 3 : fonctions.

1. Donnez *sans aucune justification* le tableau de signe des fonctions suivantes.

   a) $g_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x$.

   b) $g_2 : x \mapsto 5x + 1$.

   c) $g_3 : x \mapsto (x - 1)(3x + 60)$.

   d) $g_4 : x \mapsto \dfrac{x + 12}{x - 8}$.

2. Déterminez les fonctions dérivées des fonctions suivantes, sans vous préoccuper du domaine de dérivabilité, mais en justifiant si nécessaire.
   Aucune présentation particulière de la fonction dérivée n'est attendue.

   a) $f_1 : x \mapsto \sin(x)$.

   b) $f_2 : x \mapsto 4x^2 - 5x - 134$.

   c) $f_3 : x \mapsto x^{12} \ln(x)$.

   d) $f_4 : x \mapsto \dfrac{x + 2}{x - 3}$.

EXERCICE 4 : étude d'une fonction.

Soit $f : x \mapsto x^3 - 12x^2 + 36x$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. (a) Justifiez la dérivabilité de f puis justifiez que $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$.

   (b) Déterminez les zéros de f'. *Il s'agit donc de trouver les solutions de l'équation* $f'(x) = 0$.

   (c) Déduisez-en le signe de f'.

   (d) Déterminez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

(e) Calculez $f(2)$ et $f(6)$.

(f) Déduisez des questions précédentes le tableau de variation de f.

2. (a) Justifier que la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 4 admet pour équation réduite $y = -12x + 64$.

   (b) Démontrez que $f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3$.

   (c) Déduisez-en la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente T au point A.

   (d) On admet que $\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T.

   Démontrez que la droite d, d'équation cartésienne $6x + \frac{1}{2}y + 13 = 0$, est parallèle à T.

3. Tracez la courbe représentative de f ainsi que la tangente T dans le repère de l'**annexe A**.

Début du sujet B noté sur 20.

EXERCICE 5 : limites de suites.

Donnez sans aucune justification les limites (en $+\infty$) des suites suivantes définies par leur terme général.

a) $n^8 - 3n^2 + 7$.

b) $\dfrac{-n^3 + n - 2}{n^5 - 1}$.

c) $\dfrac{-2n^5 + 3n^3 + n}{7n^5 + 4n + 3}$.

d) $n^4 e^{-n} + \dfrac{2^n}{n!}$.

PROBLÈME 1 : probabilité.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On imagine des sacs de jetons S_1, S_2, ..., S_n, ...

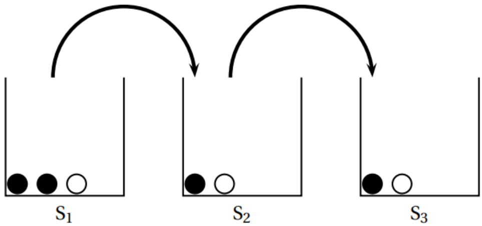
Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

— Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1,

— Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2 et on tire, au hasard, un jeton de S_2,

— Troisième étape : après avoir placé dans S_3 le jeton sorti de S_2 on tire, au hasard, un jeton de S_3 et ... ainsi de suite, ...



Pour tout entier naturel non nul k, on note E_k l'évènement : « le jeton sorti de S_k est blanc », et $\overline{E_k}$ l'évènement contraire.

Nous noterons p_k la probabilité de E_k : $p_k = \mathbb{P}(E_k)$.

1. Dans cette question on s'intéresse au tirage du premier jeton qu'on considère comme une expérience aléatoire à par entière.

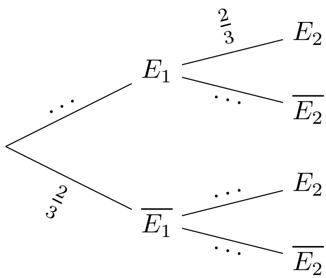
   (a) Quel espace univers est-il pertinent d'associer à ce premier tirage ?

   (b) Justifiez que la probabilité de tirer un jeton noir de la première urne est $\mathbb{P}(\overline{E_1}) = \frac{2}{3}$.

   (c) Déduisez-en la probabilité d'obtenir un jeton blanc.

2. Dans cette question on s'intéresse au tirages des deux premiers jetons, tirages qu'on considère comme une expérience aléatoire à par entière.

   (a) Reproduisez et complétez l'arbre pondéré suivant :



(b) Décrivez par une phrase les événements : E_2, $E_1 \cap E_2$ et $E_1 \cup \overline{E_2}$.

(c) Donnez sans justification $\mathbb{P}(E_1)$ et $\mathbb{P}(E_2|E_1)$.

(d) En vous appuyant sur l'arbre, et sans faire référence à des formules, calculez la probabilité d'obtenir successivement une boule blanche au premier tirage puis une boule noire au second.

(e) En vous appuyant sur l'arbre, et sans faire référence à des formules, calculez la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage.

(f) Un observateur de l'expérience n'a pas vu le premier tirage mais il voit que le second tirage donne une boule blanche.
Quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été noire ? Vous préciserez la formule utilisée.

3. Dans cette question on s'intéresse à l'événement F_k : « obtenir k fois une boule blanche après k tirages ».
Nous noterons q_k la probabilité de F_k : $q_k = \mathbb{P}(F_k)$.

(a) Donnez q_1 et q_2 sans justification.

(b) Démontrez que, pour tout entier k non nul : $q_k = \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$.

(c) Déduisez-en la nature de la suite (q_k).

(d) Étudiez la monotonie de (q_k).

(e) Étudiez la convergence de (q_k).

4. Dans cette question on s'intéresse à la suite (p_k). Rappelons que $p_1 = \frac{1}{3}$.

(a) Démontrez que pour tout entier naturel non nul k :
$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}.$$

(b) Démontrez que si (p_k) converge alors sa limite est nécessairement $\frac{1}{2}$.

(c) Soit (v_k) la suite définie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ par $v_k = p_k - \frac{1}{2}$
Démontrez que (v_k) est géométrique.

(d) Étudiez la convergence de (p_k).

(e) Expliquez comment choisir k pour que $0{,}4999 \leqslant p_k \leqslant 0{,}5$.

PROBLÈME 2 : algèbre linéaire.

Dans ce problème nous noterons $\vec{0}$ le vecteur nul, c'est-à-dire le vecteur $(0,0,0)$.
Les vecteurs, éléments de $\mathbb{R}^3$, pourront être notés indifféremment en ligne ou en colonne : par exemple $(1,2,3)$ ou $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Soient $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (-1,-2,1)$ et $v_3 = (2,0,3)$.

1. Dans cette question nous démontrerons que

$$F = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \ :\ \exists\lambda \in \mathbb{R},\, x = \lambda(v_2 - v_1)\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donnerons une représentation paramétrique.

   (a) Pour quelle valeur du nombre réel λ a-t-on l'égalité : $v_2 - v_1 = \lambda(v_2 - v_1)$? Déduisez-en que $x = v_2 - v_1 \in F$.

   (b) Par un choix astucieux de λ montrez que $\vec{0} \in F$.

   (c) Soient a un réel, x et y des vecteurs pris dans F. Il existe donc des nombres λ_x et λ_y tels que $x = \lambda_x(v_2 - v_1)$ et $y = \lambda_y(v_2 - v_1)$.
   Démontrez que $ax + y$ peut s'écrire sous la forme $\lambda_{ax+y}(v_2 - v_1)$ en précisant la valeur de λ_{ax+y}.

   (d) En vous aidant des questions précédentes justifiez que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   (e) Montrez que $F \neq \mathbb{R}^3$.

   (f) On admet que F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Donnez-en une représentation paramétrique.

Fin du sujet A noté sur 15.

2. Dans cette question nous allons démontrer que

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \ :\ \exists(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\, x = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(a) L'objectif de cette question est de démontrer que $v_2 - v_1 \in H$.
Pour quelles valeurs des nombres réels λ_1 et λ_2 astucieusement choisies, a-t-on $v_2 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)$?
Conclure.

(b) Pour quelles valeurs des nombres réels λ_1 et λ_2 astucieusement choisies, a-t-on $v_3 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2)$?
Que peut-on en déduire pour $v_3 - v_1$?

(c) Soient a un réel, x et y des vecteurs pris dans H. Démontrez que $ax+y \in H$.

(d) Concluez.

3. Nous souhaitons dans cette question établir que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants. Autrement dit il faut démontrer qu'il n'est pas possible d'exprimer l'un des vecteurs comme une combinaison linéaire des deux autres.
Soient a, b et c des nombres réels tels que $av_1 + bv_2 + cv_3 = \vec{0}$.

   (a) Déduisez de la précédente égalité un système linéaire dont a, b et c sont les solutions.

   (b) Résolvez le précédent système.

   (c) Concluez.

4. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$ et tout $j \in \{1,2,3\}$, on définit le vecteur $u_{i,j} = v_i - v_j$.
Donnez la liste des vecteurs $u_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ et $1 \leqslant j \leqslant 3$.

PROBLÈME 3 : analyse.

Partie A : étude de deux fonctions.

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 \mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et par $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. (a) Calculez la limite de f en $+\infty$. Que peut-on en déduire pour C_f ?
Calculez la limite de f en $-\infty$.

(b) Calculez $f'(x)$ et étudiez son signe.

(c) Donnez le tableau de variation de f.

2. Étudiez g : limites, dérivée, tableau de variation.

3. (a) Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ et en déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

   (b) Montrez que les tangentes en $A(0;1)$ aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont orthogonales. *Vous pourrez démontrer que le produit scalaire de vecteurs directeurs est nul.*

4. Tracez les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs tangentes au point A dans le repère de l'**annexe B**.

Partie B : calcul d'aire.

1. Déterminer les réels a, b, c pour que la fonction $H : t \mapsto (at^2 + bt + c)\mathrm{e}^{-t}$, admette la fonction $t \mapsto \left(t^2 + 2t\right)\mathrm{e}^{-t}$ pour dérivée.

2. L'aire entre les deux courbes, pour les x positifs jusqu'à une valeur $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est donnée par : $\mathscr{A}(\alpha) = H(\alpha) - H(0)$.
   Déterminez $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathscr{A}(\alpha)$.

Partie C : étude d'une suite.

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln[f(n)]$.

1. Justifiez que la suite (u_n) est décroissante.

2. On désigne par S_n la somme des n premiers termes de la suite (u_n).

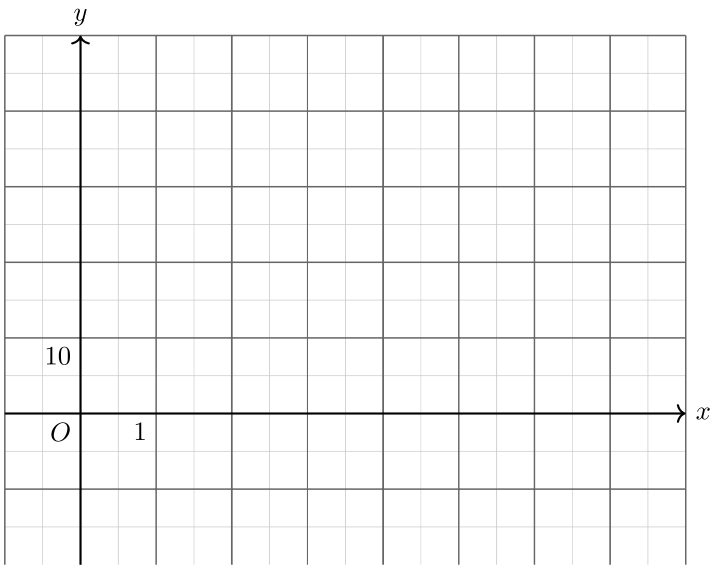
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

   (a) Montrez que $u_n = -n + 2\ln(n+1)$.

   (b) Démontrez que $S_n = 2\ln[(n+1)!] - \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

ANNEXE A.

Identifiant Wims :



ANNEXE B.

Identifiant Wims :