Devoir surveillé CPGE B/L. 2022/12/08.

EXERCICE 1 : calcul.

1. a) $-\frac{5x}{14}$. b) $\frac{x^2+2}{2x}$. c) $\frac{x^2}{21}$. d) $\frac{5}{x^2}$.

2. a) 9. b) $4\sqrt{3}$. c) $3\sqrt{11}$. d) $|a|\sqrt{b}$.

3. a) $A = a^9$. b) $B = a^{32}$.

4. a) $M(x) = -2x - 6$. b) $N(x) = 42x - 48$.
   c) $P(x) = 48x^2 - 60x - 18$. d) $Q(x) = 4x^2 + 4x + 1$.
   e) $R(x) = 30x^2 - 234x + 168$. f) $S(x) = -8x^3 - 25x^2 - 4x + 28$.

5. a) $T(x) = x(x^{13} + x + 3)$. b) $U(x) = (x-2)^2$.
   c) $V(x) = (x - \sqrt{38})(x + \sqrt{38})$. d) $W(x) = (x+3)(x-4)$.

EXERCICE 2 : résolution d'équations.

Les ensembles de solutions sont :

a) $\{-1\}$. b) $\left\{3; \frac{2}{5}\right\}$. c) $\{-2; 2\}$. d) $\{0\}$.

EXERCICE 3 : fonctions.

1. a)

x	$-\infty$		$+\infty$
g_1		$+$	

b)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
g_2		$-$	0	$+$	

c)

x	$-\infty$		-20		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x+60$		$-$	0	$+$		$+$	
g_3		$+$	0	$-$	0	$+$	

d)

x	$-\infty$		-12		8		$+\infty$
$x+12$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
g_4		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

2. a) $\cos(x)$. b) $8x-5$.

c) $12x^{11}\ln(x)+x^{11}$. d) $-\frac{5}{(x-3)^2}$.

EXERCICE 4 : étude d'une fonction.

1. (a) f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 12\times x + 0 = 3x^2 - 24x + 36$$

(b) f' et une fonction polynomiale de degré deux donnée sous forme développée avec $a=3$, $b=-24$ et $c=36$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-24)^2 - 4\times 3\times 36 = 144$.
$\Delta > 0$ donc f' admet deux racines réelles distinctes :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a} = \frac{-(-24)-\sqrt{144}}{2\times 3} = 2$.

$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a} = \frac{-(-24)+\sqrt{144}}{2\times 3} = 6.$

$$\boxed{\text{L'ensemble des zéros de } f' \text{ est } \{2;6\}.}$$

(c) Le trinôme est du signe de son coefficient ($a = 3$) dominant sauf entre ses éventuelles racines donc :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(d) f est polynomiale donc $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} x^3$ donc

$$\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \text{ et } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.}$$

(e) $f(2) = 2^3 - 12 \times 2^2 + 36 \times 2$

$$\boxed{f(2) = 32.}$$

$f(6) = 6^3 - 12 \times 6^2 + 36 \times 6.$

$$\boxed{f(6) = 0.}$$

(f)

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	32	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2. (a) La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a).$$

Or :

* $a = 4$,

* $f'(4) = 3 \times 4^2 - 24 \times 4 + 36 = -12$,
* $f(4) = 4^3 - 12 \times 4^2 + 36 \times 4 = 16$,

donc :

$$T : \; y = -12 \times (x-4) + 16.$$

$$\boxed{T : \; y = -12x + 64.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$.
D'une part

$$\begin{aligned} f(x) - (-12x + 64) &= x^3 + 12x^2 + 36x + 12x - 64 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} (x-4)^3 &= x^3 - 3 \times x^2 \times 4 + 3 \times x \times 4^2 - 4^3 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \end{aligned}$$

donc, par transitivité :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\; f(x) - (-12x + 64) = (x-4)^3.}$$

(c) $(x-4)^3$ est du signe de $x - 4$ car la fonction cube est strictement croissante et s'annule en 0.
D'où :

$$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au dessus de } T \text{ sur } [4, +\infty[\text{ et en dessous sinon.}}$$

(d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.
Vérifions que les vecteurs directeurs sont colinéaires.
$\begin{vmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 6 - 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$
Les vecteurs directeurs sont colinéaires donc

$$\boxed{T \parallel d.}$$

3.

EXERCICE 5 : limites de suites.

a) $n^8 - 3n^2 + 7 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

b) $\frac{-n^3+n-2}{n^5-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

c) $\frac{-2n^5+3n^3+n}{7n^5+4n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{2}{7}$.

d) $n^4\mathrm{e}^{-n} + \frac{2^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

PROBLÈME 1 : probabilité.

1. (a) Il semble pertinent, au vu des notations de l'énoncé de choisir

$$\boxed{\Omega = \{E_1, \overline{E_1}\}.}$$

La modélisation n'est jamais unique il est possible de numéroter les deux boules noires et de choisir $\Omega = \{N_1, N_2, B\}$. Cette dernière modélisation a l'avantage d'assurer l'équiprobabilité des issues.

(b) Il y a équiprobabilité du tirage des trois billes or l'événement tirer une boule noire est réalisé par deux boules donc

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \tfrac{2}{3}.}$$

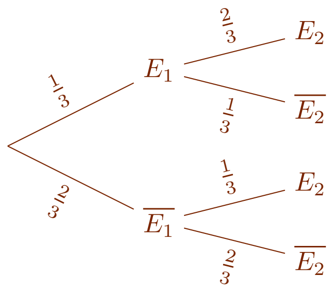
Remarquons que nous avons utiliser la modélisation par une loi uniforme discrète pour calculer la probabilité.

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_1) &= 1 - \mathbb{P}(\overline{E_1})\\ &= 1 - \frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(E_1) = \tfrac{1}{3}.}$$

2. (a) Pour compléter l'arbre on utilise le fait que la somme des probabilités sur un embranchement égale 1, et aussi le fait que si le premier tirage donne une boule noir S_2 contient deux boules noires et une boule blanche.



(b) E_2 : « la deuxième boule tirée est blanche ».
$E_1 \cap E_2$: « les deux premières boules tirées sont blanches ».
$E_1 \cup \overline{E_2}$: « la première boule tirée est blanche ou la seconde est noire ».

(c) $\mathbb{P}(E_1) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(E_2|E_1) = \frac{2}{3}$.

(d) Calculons $\mathbb{P}(E_1 \cap \overline{E_2})$.

$$\mathbb{P}(E_1 \cap \overline{E_2}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$\mathbb{P}(E_1 \cap \overline{E_2}) = \frac{1}{9}$.

(e)

(f) Calculons $\mathbb{P}(\overline{E_1}|E_2)$.

$\{E_1, \overline{E_1}\}$ est un système complet d'événement de probabilités non nulles, donc, d'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{E_1}|E_2) &= \frac{\mathbb{P}(\overline{E_1}) \times \mathbb{P}(E_2|\overline{E_1})}{\mathbb{P}(\overline{E_1}) \times \mathbb{P}(E_2|\overline{E_1}) + \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2|E_1)} \\ &= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\overline{E_1}|E_2) = \frac{1}{2}.}$$

3. (a) $q_1 = \mathbb{P}(E_1)$ donc

$$\boxed{q_1 = \frac{1}{3}.}$$

$q_2 = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2)$ donc

$$\boxed{q_2 = \frac{2}{9}.}$$

(b) L'énoncé comportait une erreur puisqu'il indiquait : $q_{k+1} = \dfrac{2^{k-1}}{3^k}$.

$$q_k = \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k)$$

D'après la formule des pobabilités composées :

$$\begin{aligned} q_k &= \mathbb{P}(E_1) \times \mathbb{P}(E_2|E1) \times \cdots \times \mathbb{P}(E_k|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{k-1}) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ q_k = \frac{2^{k-1}}{3^k}.}$$

(c) Puisque $q_k = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

$$\boxed{(q_k) \text{ est géométrique de raison } \tfrac{2}{3} \text{ et de premier terme } q_1 = \tfrac{1}{2}.}$$

(d) (q_k) est géométrique de terme initial $q_1 = \frac{1}{3}$, de raison $\frac{2}{3}$ et $0 < \frac{2}{3} < 1$ donc

$$\boxed{(q_k) \text{ est strictement décroissante.}}$$

(e) (q_k) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et $-1 < \frac{2}{3} < 1$ donc

$$\boxed{(q_k) \text{ est converge vers } 0.}$$

4. (a) Démontrons que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$\{E_k, \overline{E_k}\}$ est un système complet d'événements dont les événements sont de probabilités non nulles, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_{k+1}) &= \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}(E_{k+1}|E_k) + \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}(E_{k+1}|\overline{E_k}) \\ &= p_k \times \frac{2}{3} + (1-p_k) \times \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_{k+1} = \tfrac{1}{3}p_k + \tfrac{1}{3}.}$$

(b) Déterminons la valeur de l'éventuelle limite de (p_k).

Puisque $x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ est continue sur $\mathbb{R}$, si (p_k) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors en passant à la limite dans l'égalité $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$ on obtient :

$$\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{1}{3}.$$

Équation du premier degré qui se résout immédiatement :

$$\boxed{\text{si } (p_k) \text{ converge ce ne peut être que vers } \tfrac{1}{2}.}$$

(c) Démontrons que (v_k) est géométrique.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Par définition de (v_k) :

$$v_{k+1} = p_{k+1} - \frac{1}{2}$$

D'après la formule de récurrence établie à la question 4(b) :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}p_k - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3}p_k - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3}\left(p_k - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Nous reconnaissons la définition de la suite (v_k) :

$$v_{k+1} = \frac{1}{3}v_k$$

Comme de plus $v_1 = p_1 - frac12$,

$$\boxed{(v_k) \text{ est géométrique de terme initial } v_1 = -\frac{1}{6} \text{ et de raison } q = \frac{1}{3}.}$$

(d) Étudions la convergence de (p_k).

Par construction de (v_k), pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$p_k = v_k + \frac{1}{2}.$$

Or, d'après la question précédente, (v_k) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc

$$v_k + \frac{1}{2} \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\boxed{(p_k) \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$$

(e) Résolvons $0{,}4999 \leqslant p_k \leqslant 0{,}5$ dans $\mathbb{N}^*$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Puisque (v_k) est géométrique de terme initial $v_1 = -\frac{1}{6}$ et de raison $\frac{1}{3}$, $p_k = -\frac{1}{6 \times 3^{k-1}} + \frac{1}{2}$.

Donc clairement $p_k \leqslant 0{,}5$.

$$0{,}4999 \leqslant p_k$$

équivaut successivement à :

$$\begin{aligned}
0{,}4999 &\leqslant -\frac{1}{6 \times 3^{k-1}} + \frac{1}{2} \\
-6 \times (0{,}4999 - 0{,}5) &\geqslant \frac{1}{3^{k-1}}, \text{ car } -6 < 0 \\
\frac{1}{0{,}0006} &\leqslant 3^{k-1}, \text{ car } x \mapsto \frac{1}{x} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
\ln\left(\frac{1}{0{,}0006}\right) &\leqslant \ln(3^{k-1}), \text{ car } \ln \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
-\ln(0{,}0006) &\leqslant (k-1)\ln(3) \\
-\frac{\ln(0{,}0006)}{\ln(3)} &\leqslant k - 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour que } 0{,}4999 \leqslant p_k \leqslant 0{,}5 \text{ il faut choisir } k \geqslant \tfrac{\ln(0{,}0006)}{\ln(3)} + 1.}$$

PROBLÈME 2 : algèbre linéaire.

1. (a) Puisque $v_2 - v_1 \neq \vec{0}$ la seule valeur possible pour λ est 1 : $v_2 - v_1 = 1 \times (v_2 - v_1)$.

   $$\boxed{\text{Il faut et il suffit que } \lambda = 1 \text{ pour que l'égalité soit vérifiée.}}$$

   $v_2 - v_1 \in \mathbb{R}^3$ et nous venons d'établir qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 - v_1 = \lambda(v_2 - v_1)$ donc

   $$\boxed{v_2 - v_1 \in F.}$$

   (b) $\vec{0} = 0 \times (v_2 - v_1)$ donc

   $$\boxed{\vec{0} \in F.}$$

(c) Déterminons λ_{ax+y}.

$$ax + y = a\lambda(v_2 - v_1) + \lambda_y(v_2 - v_1)$$

En factorisant par $v_2 - v_1$:

$$ax + y = (a\lambda_x + \lambda_y)(v_2 - v_1)$$

$$\boxed{\text{Si } \lambda_{ax+y} = a\lambda_x + \lambda_y \text{ alors } ax + y = \lambda_{ax+y}(v_2 - v_1).}$$

(d) Justifions que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

* $F \subset \mathbb{R}$ par construction.
* $\vec{0} \in F$ d'après la question 1(b).
* F est stable par combinaisons linéaires d'après la question 1(c).

Des trois points précédents nous déduisons que :

$$\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

(e) Pour démontrer que F n'est pas $\mathbb{R}^3$ il suffit d'exhiber un vecteur de $\mathbb{R}^3$ qui ne soit pas dans F. Pour cela nous pouvons remarquer que tous les vecteurs de F sont colinéaires à $v_2 - v_1$.

Notons $\vec{t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ astucieusement choisi d'après $v_2 - v_1$ de façon à ce qu'il ne lui soit pas colinéaire.

$v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{t}$ puisque leurs coordonnées ne sont pas colinéaires :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & \\ -1 & \end{vmatrix} &= -2 \times (-1) - (-1) \times 2 \\ &= 4 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\vec{t} \notin F$ donc

$$\boxed{F \neq \mathbb{R}^3.}$$

(f) Puisque F est une droite vectorielle nous savons que n'importe quel vecteur non nul de cette droite engendre F.
Or, d'après la question 1(a), $v_2 - v_1$ est vecteur de F et il n'est pas nul puisque $v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$$F : \begin{cases} m_1 = -2t \\ m_2 = -1t \\ m_3 = 1t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Ou plus simplement

$$\boxed{F : \begin{cases} m_1 = -2t \\ m_2 = -t \\ m_3 = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.}$$

2. (a) Si $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$ on a bien

$$v_2 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_2).$$

Donc

$$\boxed{v_2 - v_1 \in H.}$$

(b) Si $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$ alors on a

$$v_3 - v_1 = \lambda_1(v_2 - v_1) + \lambda_2(v_3 - v_1).$$

Donc

$$\boxed{v_3 - v_1 \in H.}$$

(c) Démontrons que $ax + y \in H$.

$x \in H$ donc il existe $\lambda_{1,x}$ et $\lambda_{2,x}$ des réels tels que $x = \lambda_{1,x}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,x}(v_3 - v_1)$.

De même $y \in H$ donc il existe $\lambda_{1,y}$ et $\lambda_{2,y}$ des réels tels que $y = \lambda_{1,y}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,y}(v_3 - v_1)$.
Ainsi :

$$\begin{aligned} ax + y &= a\left[\lambda_{1,x}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,x}(v_3 - v_1)\right] + \lambda_{1,y}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,y}(v_3 - v_1) \\ &= a\lambda_{1,x}(v_2 - v_1) + a\lambda_{2,x}(v_3 - v_1) + \lambda_{1,y}(v_2 - v_1) + \lambda_{2,y}(v_3 - v_1) \\ &= \left(a\lambda_{1,x} + \lambda_{1,y}\right)(v_2 - v_1) + \left(a\lambda_{2,x} + \lambda_{2,y}\right)(v_3 - v_1) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{ax + y \in H.}$$

(d) $H \subset \mathbb{R}^3$ par construction, H est non vide, d'après la question 2(a), et stable par combinaison linéaire, d'après la question 1(c), donc

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3.}$$

3. (a) En exprimant les vecteurs avec leurs coordonnées $av_1 + bv_2 + cv_3 = \vec{0}$ donne le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a \times 1 & + & b \times (-1) & + & c \times 2 & = & 0 \\ a \times (-1) & + & b \times (-2) & + & c \times 0 & = & 0 \\ a \times 0 & + & b \times 1 & + & c \times 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Autrement dit :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 2c & = & 0 \\ -a & - & 2b & & & & \\ & & b & + & 3c & = & 0 \end{array}\right.}$$

(b) Résolvons le système.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 2c & = & 0 \\ & - & -3b & & & & \\ & & b & + & 3c & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 2c & = & 0 \\ & - & -3b & & & & \\ & & & & 9c & = & 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2$$

$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ b & \\ c = 0 & L_3 \leftarrow \frac{1}{9}L_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0 & \\ b & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 - 2L_3 \\ c = 0 & \end{cases}$$

Le système admet une unique solution $(a,b,c) = (0,0,0)$.

(c) La seule combinaison linéaire $av_1 + bv_2 + cv_3$ pour laquelle on obtient le vecteur nul est obtenue pour $a = b = c = 0$, par conséquent il ,'est pas possible d'exprimer l'un ds vecteurs comme une combinaison linéaire des deux autres.

v_1, v_2 et v_3 sont linéairement indépendants.

4.

$u_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$u_{1,2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	$u_{1,3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$
$u_{2,1} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$u_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$u_{2,3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$
$u_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$u_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$u_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

PROBLÈME 3 : analyse.

Partie A : étude de deux fonctions.

1. (a) Étudions la limite de f en $+\infty$.

Il s'agit d'une forme indéterminée $(+\infty) \times 0$. La présence d'exponentielle incite, pour lever l'indétermination, à utiliser les croissances comparées.

En développant : $f(x) = x^2 e^{-x} + 2xe^{-x} + e^{-x}$. Par comparaison des fonctions puissances et exponentielles :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et par conséquent } \mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote horizontale en } +\infty.$$

Pas d'indétermination en $-\infty$:

$$f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

(b) Calculons f'.

f est une produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x+2)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (-x^2+1)e^{-x}.$$

Études le signe de f'.

Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0,$$

$f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$.
Or $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$ donc

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(c) D'après les questions précédentes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	0

2. Étudions g.

   * g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donnée par $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
   * Donc $g' < 0$ et g est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
   * $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.

   Résumons cela par un tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
g	$+\infty$	$\searrow$	0

3. (a) Étudions le signe de $f(x) - g(x)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.
   Pour étudier le signe de $f(x)-g(x)$ nous allons en factoriser l'expression.

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= (x+1)^2\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} \\
&= \left[(x+1)^2 - 1\right]\mathrm{e}^{-x} \\
&= (x^2 + 2x)\mathrm{e}^{-x} \\
&= x(x+2)\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

   D'où :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(b) Montrons que les tangentes T_f et T_g à $\mathscr{C}f$ et $\mathscr{C}_g$ en A sont orthogonales.

* T_f : $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$, donc

$$T_f : \ y = x + 1.$$

Nous en déduisons une équation cartésienne :

$$T_f : \ -x + y - 1 = 0.$$

* De même

$$T_g : \ x + y - 1 = 0.$$

* D'après les équations cartésiennes $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs respectivement de T_f et T_g.

$$\begin{aligned} \det(\vec{u},\vec{v}) &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times -(-1) \times (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

T_f et T_g sont orthogonales.

4.

Partie B : calcul d'aire.

1. Déterminons a, b et c.

   H est un produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H'(t) &= (2at+b)\mathrm{e}^{-x} - (at^2+bt+c)\mathrm{e}^{-x} \\ &= \left[(2at+b) - (at^2+bt+c)\right]\mathrm{e}^{-t} \\ &= \left[-at^2+(2a-b)t-c\right]\mathrm{e}^{-t} \end{aligned}$$

   On souhaite que pour tout t réel :

$$\left[-at^2+(2a-b)t+(b-c)\right]\mathrm{e}^{-t} = \left(t^2+2t\right)\mathrm{e}^{-t}$$

   Autrement dit, puisque $\mathrm{e}^{-x} > 0$:

$$-at^2+(2a-b)t+(b-c) = t^2+2t$$

   Ceci étant vrai pour tout t réel nous en déduisons :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a-b = 2 \\ b-c = 0 \end{cases}.$$

   Donc : $a = -1$, $b = -4$ et $c = -4$.
   Il est aisé de vérifier que ces valeurs conviennent effectivement.

$$\boxed{H : t \mapsto (-t^2-4t+4)\mathrm{e}^{-t}.}$$

2. Étudions la limite de $\mathscr{A}$ en $+\infty$.

   Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\alpha) &= H(\alpha) - H(0) \\ &= (-\alpha^2-4\alpha+4)\mathrm{e}^{-\alpha}+4 \end{aligned}$$

   Par comparaison puissance exponentielle :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty} \mathscr{A}(\alpha) = 4.}$$

Partie C : étude d'une suite.

1. Étudions la monotonie de (u_n).

   f est décroissante sur $[, +\infty[$ et à valeurs dans $]0{,}4\mathrm{e}^{-1}]$, et ln est croissante sur $]0{,}4\mathrm{e}^{-1}]$, donc par composition $\ln \circ f$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

   $$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$$

2. (a) Justifions la formule proposée pour u_n.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$\begin{aligned} u_n &= \ln(f(n)) \\ &= \ln\left((n+1)^2 \mathrm{e}^{-n}\right) \\ &= 2\ln(n+1) + \ln\left(\mathrm{e}^{-n}\right) \end{aligned}$$

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n - n + 2\ln(n+1).}$$

   (b) Démontrons la formule explicite de S_n proposée.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

   D'après la question précédente :

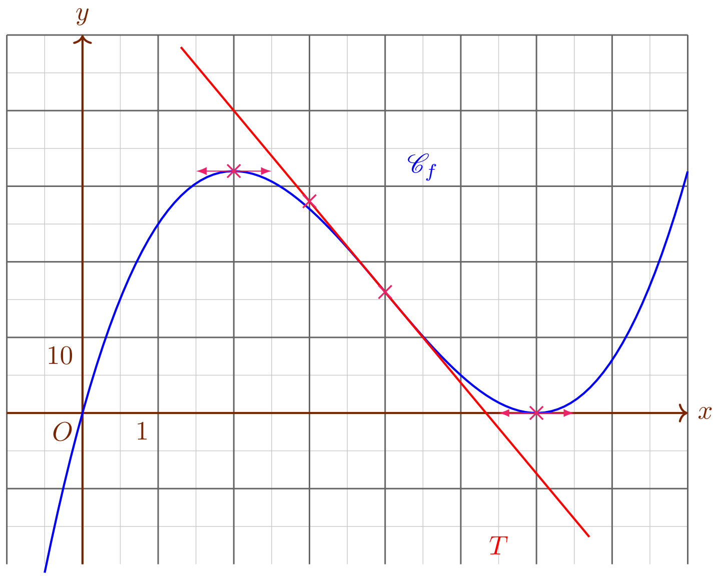
   $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} -k + 2\ln(k+1) \\ &= \left(-\sum_{k=1}^{n} k\right) + 2\left(\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1)\right) \\ &= -\frac{n(n+1)}{2} + 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(k+1)\right) \\ &= -\frac{n(n+1)}{2} + 2\ln\left(\prod_{k=1}^{n+1} k\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = -\frac{n(n+1)}{2} + 2\ln\left((n+1)!\right).}$$

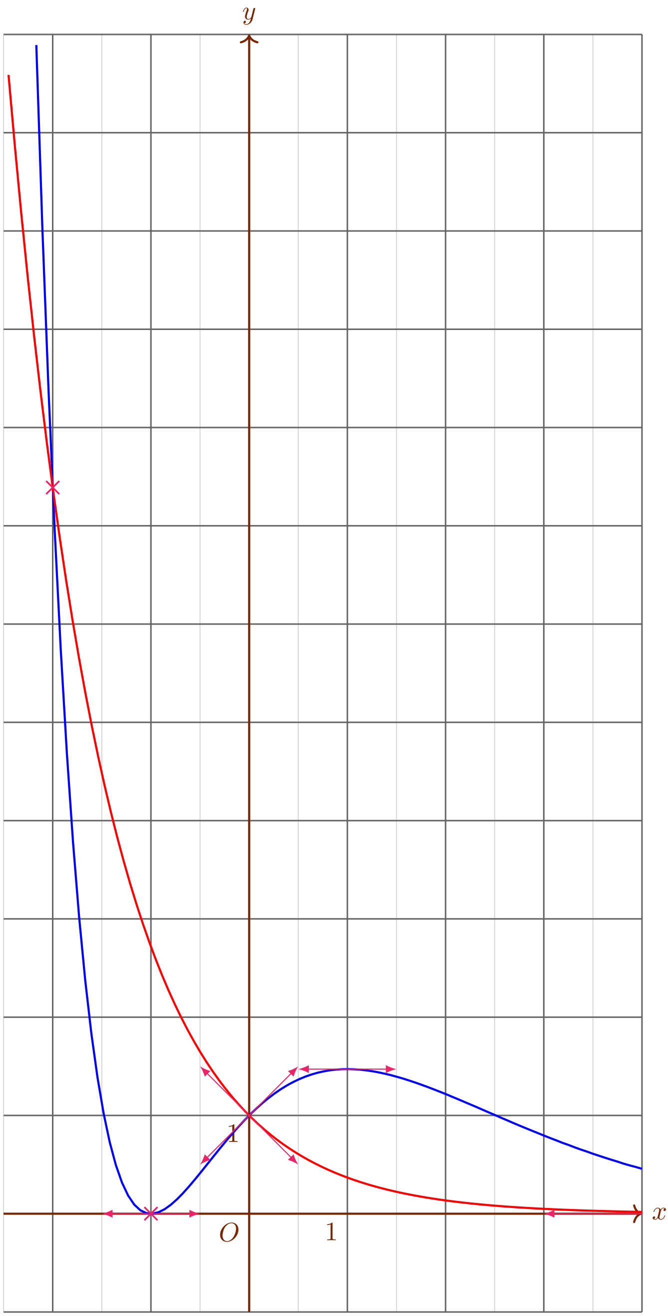
ANNEXE A.

Sont indiqués en rose les éléments de construction déduis des démonstrations faites dans les questions précédentes (points particuliers, tangentes, asymptotes, points d'intersection des deux courbes, position relative, variations, symétries, ...).



ANNEXE B.

Sont indiqués en rose les éléments de construction déduis des démonstrations faites dans les questions précédentes (points particuliers, tangentes, asymptotes, points d'intersection des deux courbes, position relative, variations, symétries, ...).


y
x
O
1
1